2 Vecteurs orthogonaux

Définition Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits **orthogonaux** si et seulement si l'un des deux est nul ou si $(AB) \perp (CD)$.

Notation: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

Selon la définition des vecteurs orthogonaux, on a

a) $\forall \{x, y\} \subset \mathbb{R}^* \quad \vec{0} \in \{\vec{u}, \vec{v}\} \Leftrightarrow \vec{0} \in \{x \cdot \vec{u}, y \cdot \vec{v}\}$

b) Si $\vec{0} \notin \{\vec{u}, \vec{v}\}$ et avec $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$ et $\{x, y\} \subset R^*$

alors $x \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AB'}$ et $B' \in (AB)$ et $y \cdot \vec{v} = \overrightarrow{CD'}$ et $D' \in (CD)$

$(AB') = (AB)$ et $(CD') = (CD)$

enfin $\forall \{x, y\} \subset \mathbb{R}^* \quad \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (AB) \perp (CD)$

$(AB') \perp (CD') \Leftrightarrow \overrightarrow{AB'} \perp \overrightarrow{CD'}$

$\Leftrightarrow x \cdot \vec{u} \perp y \cdot \vec{v}$

On a alors la propriété suivante

Les multiples de deux vecteurs orthogonaux sont orthogonaux et réciproquement.

$$\forall \{x, y\} \subset \mathbb{R}^* \quad \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x \cdot \vec{u} \perp y \cdot \vec{v}$$

Selon la définition des vecteurs orthogonaux, on a

a) Pour $\vec{0} \notin \{\vec{u}, \vec{v}\}$, avec $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ on a

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \quad \Leftrightarrow \quad (AB) \perp (BC)$$

$$\delta(A,C)^2 = \delta(A,B)^2 + \delta(B,C)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

b) Pour $\vec{u} = \vec{0}$, $\vec{0} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \|\vec{0} + \vec{v}\|^2 \quad \vec{0}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

c) Pour $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{u} \perp \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \|\vec{u} + \vec{0}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \quad \|\vec{0}\|^2$

On obtient ainsi pour les vecteurs une propriété analogue à celle de Pythagore pour le triangle rectangle.

$$\boxed{\forall \{\vec{u}, \vec{v}\} \subset \mathcal{V}_2 \quad \vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2}$$

Définition $\vec{i}, \vec{j}$) est une **base orthonormée** B.O.N. si et seulement si

$$\vec{\ } \perp \vec{\ } \quad \text{et} \quad \|\vec{i} \quad = \quad \vec{j}\| = 1$$

Par la propriété des multiples de vecteurs orthogonaux, on a $\vec{i} \perp \vec{j} \quad \Rightarrow \quad x \cdot \vec{i} \perp y \cdot \vec{j}$

Par "Pythagore", si $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{aligned} \vec{v}\|^2 &= \|x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}\|^2 = \|x \cdot \vec{i}\|^2 + \ y \cdot \vec{j}\ \|^2 \\ &= x^2 \|\vec{i}\|^2 + y^2 \|\vec{j}\|^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ \|\vec{v} &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

On obtient ainsi, pour la norme d'un vecteur, le théorème suivant.

$$\boxed{\text{Dans une base orthonormée, si } \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ alors } \|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Définition Un **repère** $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dit **orthonormé** (R.O.N.) si et seulement si la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée.

Pour la distance de deux points, on a

Dans un repère orthonormé, si $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ alors
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$ et $\delta(A,B) = \lVert \overrightarrow{AB} \rVert = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

Par le "théorème de Pythagore" et celui de la norme, pour $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $(\vec{i}, \vec{j})$ B.O.N.

on a

$$\begin{array}{rcrcl}
\vec{u} \perp \vec{v} & \Leftrightarrow & \lVert \vec{u} + \vec{v} \rVert^2 & = & \lVert \vec{u} \rVert^2 + \lVert \vec{v} \rVert^2 \\
 & & (x + x')^2 + (y + y')^2 & = & (x^2 + y^2) + (x'^2 + y'^2) \\
 & \Leftrightarrow & x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 & = & (x^2 + y^2) + (x'^2 + y'^2) \\
 & \Leftrightarrow & 2xx' + 2yy' & = & 0 \\
 & \Leftrightarrow & xx' + yy' & = & 0 \\
 & \Leftrightarrow & \begin{vmatrix} x' & -y \\ y' & x \end{vmatrix} & = & 0 \\
 & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} & = & \lambda \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}
\end{array}$$

On obtient ainsi un critère d'orthogonalité de deux vecteurs.

Dans une base orthonormée, si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors
$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$