SYSTEMES D'EQUATIONS

1 Méthodes de résolution

Exercices

1 *On donne trois feuilles rectangulaires de longueur* x *et de largeur* y. *On en pose deux côte à côte et on les recouvre partiellement avec la troisième. On remarque qu'il reste une marge. Comment choisir* x *et* y *pour que la marge soit de largeur constante tout autour de la troisième feuille? Y a-t-il plusieurs choix possibles pour* x *et* y ? *Si* $x = 12$, *comment choisir* y ? *Reprendre le problème avec quatre feuilles.*

2 *Comment choisir* x *et* y *dans* $\mathbb{N}$ *si* $2x - 3y = 5$.

3 *a) On veut obtenir Fr. 64.- avec 10 pièces d'un premier type et 7 d'un deuxième type ainsi que Fr. 31.- avec 5 pièces du premier type et 3 du deuxième. Quelle est la valeur de ces pièces?*

b) On donne Fr. 3,10 avec 3 pièces d'un type et 5 d'un autre. Peut-on obtenir la même somme avec 8 pièces du premier type et 3 du deuxième? Quelle est la valeur de chacune de ces pièces?

4 *Trouver* α *et* β *si* $f(x) = \alpha x + \beta$ *et* $f(1) = 1$ *et* $f(3) = 7$.

5 *Trouver* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *si* $\begin{cases} 2x + 3y = \frac{3}{2} \\ \text{et} \\ 2x + 4y = \frac{5}{2} \end{cases}$

THEOREME 1	$\begin{cases} a = b \\ \text{et} \\ c = d \end{cases}$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} a + c = b + d \\ \text{et} \\ c = d \end{cases}$
	$\begin{cases} a = b \\ \text{et} \\ c = d \end{cases}$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} x \cdot a = x \cdot b \\ \text{et} \\ y \cdot c = y \cdot d \end{cases}$ et $0 \notin \{x,y\}$

Exercice 6 *Résoudre dans* $\mathbb{R}^2$

1 $\begin{cases} 16x + 4y = 15 \\ \text{et} \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$ 2 $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ \text{et} \\ 2x + 5y = 3 \end{cases}$ 3 $\begin{cases} x + 4y = 1 \\ \text{et} \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

4 $\begin{cases} x + y = 3 \\ \text{et} \\ x - y = 2 \end{cases}$ 5 $\begin{cases} 6x - 9y = 0 \\ \text{et} \\ 8x + 15y = 9 \end{cases}$ 6 $\begin{cases} -4x + 5y = 2 \\ \text{et} \\ 12x + 10y = 56 \end{cases}$

Remarque

$\begin{cases} a = b \\ \text{et} \\ c = d \end{cases}$ s'écrit aussi $\begin{cases} a = b \\ \\ c = d \end{cases}$ s'il n'y a pas de confusion avec "ou".

Exemples de méthodes utilisées pour résoudre des systèmes

1 Méthode de comparaison

$$\begin{cases} 2x + 6y = 12 \\ x - 3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(12 - 6y) = 6 - 3y \\ x = 7 + 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 3y = 7 + 3y \\ x = 7 + 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = 6y \\ x = 7 + 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{6} \\ x = 7 + 3(-\frac{1}{6}) \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (\frac{13}{2} ; -\frac{1}{6})$$

2 Méthode de substitution

$$\begin{cases} 4x + 16y = -12 \\ 3x - 2y = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4}(-12 - 16y) = -3 - 4y \\ 3(-3 - 4y) - 2y = 19 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -14y = 19 + 9 \\ x = -3 - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = -3 - 4(-2) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (5,-2)$$

3 Méthode des combinaisons linéaires

On désigne par I la première équation et par II la deuxième.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 46 \\ -2x + 4y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} - \mathrm{II} \\ 2\cdot\mathrm{I} + 3\cdot\mathrm{II} \end{array} \begin{cases} 5x = 46 - 14 = 32 \\ 20y = 92 + 42 = 134 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{32}{5} \\ y = \frac{67}{10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{32}{5}, \frac{67}{10}\right)$$

<u>Remarque</u>

Ne pas choisir des combinaisons linéaires qui ont des coefficients proportionnels.

Exercice 7 *Résoudre dans* $\mathbb{R}^2$ *avec l'une des trois méthodes*

1 $\begin{cases} 2x + 4y = 42 \\ -5x + 7y = 31 \end{cases}$ 2 $\begin{cases} 3x - 8y = 36 \\ 4x - 5y = -14 \end{cases}$ 3 $\begin{cases} 6x + 5y = 8 \\ 3x + \frac{y}{2} = -4 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 5x - \frac{y}{4} = 33 \\ -10x + \frac{y}{2} = -68 \end{cases}$ 5 $\begin{cases} mx + 5y = 10 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases}$ 6 $\begin{cases} x + 2y = 17 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$

7 $\begin{cases} 2x = 3y \\ x + y = \frac{5}{12} \end{cases}$ 8 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 22 \\ 2x^2 - y^2 = -1 \end{cases}$ 9 $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = -2 \\ -x + \frac{3y}{2} = 6 \end{cases}$

10 $\begin{cases} \frac{x}{2} = 4y \\ 3 = 2y - x \end{cases}$ 11 $\begin{cases} 11x + 18y = 1 \\ 22x + 36y = 3 \end{cases}$ 12 $\begin{cases} 2x = -\frac{1}{3} \\ -7y = 1 + x \end{cases}$