

SYSTEMES D'EQUATIONS

2 Méthode des déterminants

2.1 Théorème de Cramer

Soit le système paramétrique :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ \text{et} \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad \text{et } \{a, b, c, a', b', c'\} \subset \mathbb{R}$$

et $(a, b) \neq (0, 0)$
et $(a', b') \neq (0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \begin{vmatrix} a' & b' \\ -a & -b \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a'ax + a'by = a'c \\ -aa'x - ab'y = -ac' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0x + (a'b - ab')y = (a'c - ac') \quad (\times (-1)) \\ \text{et} \\ (ab' - a'b)x + 0y = (cb' - c'b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (ab' - a'b)y = a'c - ac' \\ (ab' - a'b)x = cb' - c'b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab' - a'b \neq 0 \quad \text{et } x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} \quad \text{et } y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b} \\ \text{ou} \\ ab' - a'b = 0 \quad \text{et } \begin{cases} 0y = a'c - ac' \\ \text{et} \\ 0x = cb' - c'b \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D \cdot x = D_x \\ \text{et} \\ D \cdot y = D_y \end{cases}$$

$$\text{ou } D = a'b' - a'b$$

$$\text{et } D_y = ac' - a'c$$

$$D_x = cb' - c'b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D \neq 0 \text{ et } (x; y) \in \left\{ \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right) \right\} \\ \text{ou} \\ D = 0 \text{ et } \begin{cases} 0 \cdot x = D_x \\ 0 \cdot y = D_y \end{cases} \text{ et } \begin{cases} D_x \neq 0 \text{ ou } D_y \neq 0 \\ \text{et } (x; y) \in \emptyset \\ \text{(système impossible)} \\ \text{ou} \\ D_x = D_y = 0 \\ \text{et } \begin{cases} 0 \cdot x = 0 \\ 0 \cdot y = 0 \end{cases} \text{ (système indéterminé)} \\ \text{et } (x, y) \in ? \end{cases} \end{cases}$$

Truc mnémotechnique :

$$D = ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \quad (\text{déterminant principal du système})$$

$$D_x = cb' - c'b = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$$

$$D_y = ac' - a'c = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$