

2 Méthode des déterminants

2.1 Théorème de Cramer

Exercice 8 Résoudre dans \mathbb{R}^2 , m paramètre

$$\begin{array}{lll}
 1 \quad \begin{cases} 0x + 4y = 5 \\ x - \frac{y}{2} = 1 \end{cases} & 2 \quad \begin{cases} 0x - \frac{y}{2} = \frac{1}{4} \\ 2x + 0y = \frac{5}{2} \end{cases} & 3 \quad \begin{cases} 10x + 10y = 1 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \\
 4 \quad \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 0x + 0y = 5 \end{cases} & 5 \quad \begin{cases} 2x + 0y = 4 \\ mx + y = 0 \end{cases} & 6 \quad \begin{cases} 5x + y = 10 \\ 0x + 0y = m \end{cases}
 \end{array}$$

THEOREME 2 Si $0 \notin \{a, b, a', b'\}$

$$\text{alors } (S) \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} b' \textcircled{1} - b \textcircled{2} \\ a \textcircled{2} - a' \textcircled{1} \end{matrix} \begin{cases} (ab' - a'b)x = cb' - c'b \\ (ab' - a'b)y = ac' - a'c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \end{cases}$$

Le nombre $ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ s'appelle **déterminant** du système, noté $\det(S)$ ou D .

Le nombre $b'c - bc' = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ s'appelle déterminant relatif à x , noté D_x .

Le nombre $ac' - a'c = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$ s'appelle déterminant relatif à y , noté D_y .

Pour la résolution du système, trois cas se présentent.

$$a) \quad ab' - a'b \neq 0 \quad \text{et} \quad (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \\ y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \end{cases} \quad \text{un et un seul couple} \\ \text{solution pour (S)}$$

$$b) \quad ab' - a'b = 0 \quad \text{et} \quad (Dx \neq 0 \text{ ou } Dy \neq 0) \quad \text{et} \quad (S) \Leftrightarrow (0x \neq 0 \text{ ou } 0y \neq 0) \\ \Leftrightarrow (x,y) \in \emptyset \quad \text{aucune solution pour (S)}$$

$$c) \quad ab' - a'b = 0 \quad \text{et} \quad Dx = 0 \text{ et } Dy = 0 \\ \text{alors} \quad \begin{cases} ab' - a'b = 0 \\ b'c - bc' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{b}{b'} a' = ka' \\ c = \frac{b}{b'} c' = kc' \\ b = \frac{b}{b'} b' = kb' \end{cases}$$

et une des équations est multiple de l'autre

et le système est réduit à une seule équation $a'x + b'y = 0$

$$\text{Alors} \quad (S) \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) = (x, \frac{c' - a'x}{b'}) \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ (x,y) = (\frac{c' - b'y}{a'}, y) \text{ et } y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{une infinité} \\ \text{de couples} \\ \text{solutions pour (S)}$$

Exercices

9 Résoudre dans \mathbb{R}^2 selon les modèles suivants

$$a) \quad \begin{cases} 8x + 5y = 36 \\ -3x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\text{On a} \quad \det(S) = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 31 \quad Dx = \begin{vmatrix} 36 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 62 \quad Dy = \begin{vmatrix} 8 & 36 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 124$$

$$\text{Ainsi,} \quad (S) \Leftrightarrow \begin{cases} 31x = 62 \\ 31y = 124 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (2;4)$$

$$b) \begin{cases} x - 3y = 5 \\ -2x + 6y = -10 \end{cases}$$

$$\text{On a } \det(S) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad D_x = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -10 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -10 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Ainsi, } (S) \Leftrightarrow x - 3y = 5 \Leftrightarrow y = \frac{x-5}{3} \Leftrightarrow (x,y) = \left(x, \frac{x-5}{3}\right) \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

$$c) \begin{cases} -2x + 8y = 7 \\ x - 4y = -3 \end{cases} \quad \text{On a } \det(S) = \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad D_x = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -4$$

$$\text{Ainsi, } (S) \Leftrightarrow (x,y) \in \emptyset$$

$$1 \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} \frac{x}{2} + y = 2 \\ x + \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} x + 3 = y - 1 \\ -3x + 3y = 12 \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{1}{4} \\ \frac{x-y}{3} = 1 \end{cases}$$

$$7 \begin{cases} 2x = 3y + 5 \\ 4y = 3x - 1 \end{cases}$$

$$8 \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$9 \begin{cases} \frac{x}{5} - y = 3 \\ -x + 5y = 15 \end{cases}$$

10 Comment choisir m et n pour que $(x,y) = (1;2)$ soit solution du système

$$1 \begin{cases} (m+1)x + y = 1 \\ (n+2)x + 3y = 2 \end{cases} \quad 2 \begin{cases} (2m+1)x + ny = 0 \\ (m-1)x - (n+1)y = 1 \end{cases} \quad 3 \begin{cases} (m+1)x^2 - (3-n)y = 1 \\ (5-m)x + ny^2 = 1 \end{cases}$$

11 Résoudre les équations paramétriques selon l'exemple suivant.

$$\begin{cases} (m+1)x + y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ \text{ou} \\ m \neq -1 \text{ et } \det(S) = 4m+2 \quad D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \quad D_y = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3m+1 \end{cases} \quad \text{et } y = 1 \text{ et } x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 & \text{et } (x,y) = (-\frac{1}{2}, -1) \\ \text{ou} \\ m \neq -1 & \text{et } \begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} & \text{et } \begin{cases} x = \frac{1}{4m+2} \\ y = \frac{3m+1}{4m+2} \end{cases} \\ \text{ou} \\ m = -\frac{1}{2} & \text{et } (x,y) \in \emptyset \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} 1 & \begin{cases} 2x + (m-1)y = 1 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases} & 2 & \begin{cases} 2mx + y = 3 \\ \frac{x}{3} - y = 1 \end{cases} & 3 & \begin{cases} 4x + 2y = m \\ 3x - y = 1 \end{cases} \\ 4 & \begin{cases} (m+2)x + y = 2 \\ (m+2)y + x = 4 \end{cases} & 5 & \begin{cases} (m^2+1)x + y = 0 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases} & 6 & \begin{cases} x + my = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \end{array}$$

2.2 Cas de systèmes avec des coefficients nuls

Un coefficient est nul et $0 \notin \{a', b, b'\}$

$$\begin{cases} 0x + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{c}{b} \\ x = \frac{c' - b'\frac{c}{b}}{a'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{bc' - b'c}{a'b} \\ y = \frac{c}{b} \end{cases}$$

Avec les déterminants on obtient

$$\text{dét}(S) = \begin{vmatrix} 0 & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = -a'b \quad Dx = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = b'c - bc' \quad Dy = \begin{vmatrix} 0 & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = -a'c$$

$$\text{et } \begin{cases} 0x + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a'bx = b'c - bc' \\ -a'by = -a'c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{bc' - b'c}{a'b} \\ y = \frac{c}{b} \end{cases}$$

On peut donc aussi utiliser la méthode des déterminants si un coefficient est nul.

Deux coefficients sont nuls et $0 \notin \{a', b'\}$

$$\begin{cases} 0x + 0y = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \text{ et } y = \frac{c' - a'x}{b'} \\ \text{ou} \\ c \neq 0 \text{ et } (x,y) \in \emptyset \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \text{ et } (x,y) = (x, \frac{c' - a'x}{b'}) \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ c \neq 0 \text{ et } (x,y) \in \emptyset \end{cases}$$

Avec les déterminants on obtient

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 \quad Dx = \begin{vmatrix} c & 0 \\ c' & b' \end{vmatrix} = b'c \quad Dy = \begin{vmatrix} 0 & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = -a'c$$

$$\text{ainsi, } (S) \text{ et } \det(S) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Dx=0 \text{ et } Dy=0 \Leftrightarrow c=0 \text{ et } y = \frac{c' - a'x}{b'} \\ \text{ou} \\ Dx \neq 0 \text{ ou } Dy \neq 0 \Leftrightarrow c \neq 0 \text{ et } (x,y) \in \emptyset \end{cases}$$

Dans ce cas aussi, on peut utiliser la méthode des déterminants.

Exercices

12 Démontrer que l'écriture des déterminants convient aussi aux systèmes suivants.

$$\text{a) } \begin{cases} 0x + by = c \\ 0x + b'y = c' \\ \text{et } 0 \notin \{b, b'\} \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 0x + by = c \\ a'x + 0y = c' \\ \text{et } 0 \notin \{a', b\} \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 0x + 0y = c \\ 0x + b'y = c' \\ \text{et } b' \neq 0 \end{cases}$$

13 Résoudre dans \mathbb{R}^2

$$1 \quad \begin{cases} 3x = 9 \\ 2x - y = 2 \end{cases} \quad 2 \quad \begin{cases} 5y = 25 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad 3 \quad \begin{cases} 3x - 7y = 18 \\ 2x = 12 \end{cases}$$

14 Résoudre les systèmes paramétriques dans \mathbb{R}^2 selon le modèle suivant.

$$(S) \quad \begin{cases} 4x - y = -m \\ 2mx - y = -2 \end{cases}$$

$$\text{Avec} \quad \det(S) = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2m & -1 \end{vmatrix} = 2(m-2) \quad Dx = \begin{vmatrix} -m & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = m-2$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 4 & -m \\ 2m & -2 \end{vmatrix} = -8 + 2m^2 = 2(m+2)(m-2)$$

$$\text{On a } (S) \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \text{ et } \det(S) = D_x = D_y = 0 & \text{et } 4x - y = -2 \\ \text{ou} \\ m \neq 2 \text{ et } \begin{cases} 2(m-2)x = m-2 \\ 2(m-2)y = 2(m+2)(m-2) \end{cases} & \text{et } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = m+2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \text{ et } (x,y) = (x, 4x+2) \text{ et } x \in \mathbf{R} \\ \text{ou} \\ m \neq 2 \text{ et } (x,y) = \left(\frac{1}{2}, m+2\right) \end{cases}$$

$$1 \begin{cases} (m-4)x + my = -2 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} mx + 3y = 5 \\ 6x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} 7x - (m+5)y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} 4x + my = 3 \\ mx + 4y = m+1 \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} ax + by = ab+1 \\ abx + ay = a^2+b \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} x - (m+1)y = m \\ (m+2)x + (m+1)y = -1 \end{cases}$$

$$7 \begin{cases} (a+b)x + by = a \\ (a+b)x + ay = b \end{cases}$$

$$8 \begin{cases} y = mx + 2m \\ 2x = y - 3m \end{cases}$$

$$9 \begin{cases} 2x = my + m \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

15 Résoudre les systèmes suivants dans \mathbf{R}^3 avec des méthodes utilisées dans \mathbf{R}^2 .

$$1 \begin{cases} x + 2y - 3z = -6 \\ 2x + 3y + z = 7 \\ 3x - 2y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} x + 2y - 3z = -12 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ 3x - 2y + 2z = 13 \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ -x - y + z = 0 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} 3x + 2y - z = 7 \\ 2x - y - z = -1 \\ x - 2y - 2z = -8 \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} x + 3y + 3z = -1 \\ 3x + y + 3z = 7 \\ 3x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + 2z = 15 \\ x + y + 3z = 18 \end{cases}$$

$$7 \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 5x + y + 3z = -1 \\ 4x + 2y + z = -4 \end{cases}$$

$$8 \begin{cases} 2x - z + y = 0 \\ 3y - x - 2z = -19 \\ 4z - y + 3x = 21 \end{cases}$$

$$9 \begin{cases} 3z + 2x - y = 9 \\ 3x - z + 2y = 4 \\ x + 3y + 2z = 13 \end{cases}$$