Examen de mathématique – préparation

(Système d'équations)

1) Résoudre ces systèmes **sans la méthode de Cramer** :

a) $\begin{cases} 12x + 11y = 6 \\ -2x + 3y = 28 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{3}{x+2} + \frac{1}{y} = 9 \\ \frac{2}{x+2} - \frac{3}{y} = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y-1} = 10 \\ \frac{5}{x} - \frac{4}{y-1} = 20 \end{cases}$

2) Résoudre et discuter les systèmes d'équations paramétriques suivants :
(utiliser la méthode de Cramer)

a) $\begin{cases} mx + 4y = 2 \\ (m^2 - 1)x + 3my = m + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax + by = 2ab \\ bx + ay + b^2 = 0 \end{cases}$

1) a) $\begin{cases} 12x + 11y = 6 \\ -2x + 3y = 28 \end{cases} \left| \begin{matrix} 1 \\ 6 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 3 \\ -11 \end{matrix}$ et $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0x + 29y = 174 \\ 58x + 0y = -290 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{174}{29} = 6 \\ x = \frac{-290}{58} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) \in \{(-5;6)\}$

1) b) $\begin{cases} \frac{3}{x+2} + \frac{1}{y} = 9 \\ \frac{2}{x+2} - \frac{3}{y} = 5 \end{cases}$ et $(x;y) \in \mathbb{R} - \{-2\} \times \mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow u = \frac{1}{x+2}$ et $t = \frac{1}{y}$ et $\begin{cases} 3u + t = 9 \\ 2u - 3t = 5 \end{cases} \left| \begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$

$\Leftrightarrow u = \frac{1}{x+2}$ et $t = \frac{1}{y}$ et $\begin{cases} 0u + 11t = 3 \\ 11u + 0 \cdot t = 32 \end{cases}$

$\Leftrightarrow u = \frac{1}{x+2} = \frac{32}{11}$ et $t = \frac{1}{y} = \frac{3}{11}$

$\Leftrightarrow 11 = 32x + 64$ et $y = \frac{11}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-53}{32}$ et $y = \frac{11}{3} \Leftrightarrow (x;y) \in \left\{\left(\frac{-53}{32}; \frac{11}{3}\right)\right\}$

1c) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y-1} = 10 \\ \frac{5}{x} - \frac{4}{y-1} = 20 \end{cases}$ et $(x;y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} - \{1\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{x} \text{ et } Y = \frac{1}{y-1} \\ \text{et} \\ X + 2Y = 10 \\ 5X - 4Y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{x} \text{ et } Y = \frac{1}{x-1} \\ D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \\ D_x = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 20 & -4 \end{vmatrix} = -80 \quad \text{et } X = \frac{-80}{-14} = \frac{40}{7} \\ D_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 5 & 20 \end{vmatrix} = -30 \quad \text{et } Y = \frac{-30}{-14} = \frac{15}{7} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{x} = \frac{40}{7} \text{ et } x = \frac{7}{40} \\ \text{et} \\ Y = \frac{1}{y-1} = \frac{15}{7} \text{ et } 7 = 15y - 15 \text{ et } y = \frac{22}{15} \end{cases}$ et $(x;y) \in \left\{\left(\frac{7}{40}; \frac{22}{15}\right)\right\}$

2a)

$$\begin{cases} mx + 4y = 2 \\ (m^2-1)x + 3my = m+1 \end{cases} \quad \text{et } (x;y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Leftrightarrow D = \begin{vmatrix} m & 4 \\ m^2-1 & 3m \end{vmatrix} = 3m^2 - 4m^2 + 4 = -m^2 + 4 = 4 - m^2$$
$$= (2-m)(2+m)$$

et

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ m+1 & 3m \end{vmatrix} = 6m - 4m - 4 = 2m - 4 = 2(m-2)$$

et

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 2 \\ m^2-1 & m+1 \end{vmatrix} = m(m+1) - 2(m^2-1) = (m+1)[m-2(m-1)]$$
$$= (m+1)(-m+2)$$

et $\begin{cases} m=-2 \text{ et } D=0 \text{ et } D_x=-8\neq 0 \ (\text{et } D_y=-4\neq 0) \\ \quad \text{et } (x;y)\in\emptyset \\ \text{ou} \\ m=2 \text{ et } D=0 \text{ et } D_x=D_y=0 \text{ et } \begin{cases} 2x+4y=2 \\ (3x+6y=3) \end{cases} \\ \quad \text{et } x+2y=1 \text{ et } (x;y)\in\{(1-2k\,;\,k)\mid k\in\mathbb{R}\} \\ \text{ou} \\ m\notin\{2;-2\} \text{ et } D\neq 0 \text{ et } x=\dfrac{2(m-2)}{\underset{-1}{(2-m)}(2+m)}=\dfrac{-2}{m+2} \\ \quad \text{et } y=\dfrac{(m+1)(-m+2)}{(2-m)(2+m)}=\dfrac{m+1}{m+2} \\ \quad \text{et } (x;y)\in\left\{\left(\dfrac{-2}{m+2}\,;\,\dfrac{m+1}{m+2}\right)\right\} \end{cases}$

3) b) $\begin{cases} ax+by=2ab \\ bx+ay+b^2=0 \end{cases}$ et $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=2ab \\ bx+ay=-b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D=\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}=a^2-b^2=(a-b)(a+b) \\ \text{et } D_x=\begin{vmatrix} 2ab & b \\ -b^2 & a \end{vmatrix}=2a^2b+b^2=b(2a^2+b^2) \\ \text{et } D_y=\begin{vmatrix} a & 2ab \\ b & -b^2 \end{vmatrix}=-ab^2-2ab^2=-3ab^2 \end{cases}$

et $a\neq b$ et $a\neq -b$ et $D\neq 0$ et $(x;y)\in\left\{\left(\dfrac{b(2a^2+b^2)}{a^2-b^2}\,;\,\dfrac{-3ab^2}{a^2-b^2}\right)\right\}$

ou

$a=b$ et $D=0$ et $D_x=3a^3$ et $D_y=-3a^3$ et $a=0$ et $D_x=D_y=0$

et $\begin{cases} 0x+0y=0 \\ 0x+0y=0 \end{cases}$

et $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

ou $a = b \neq 0$ et $D = 0$ et $D_x \neq 0$ et $D_y \neq 0$

et $(x; y) \in \emptyset$

ou $a = -b$ et $D = 0$ et $D_x = -3a^2 \neq 0$ et $D_y = -3a^2 \neq 0$
$(\neq 0)$

et $(x; y) \in \emptyset$