

Examen de mathématique – factice

(Systèmes)

- 1) Résoudre sans la méthode de Cramer le système suivant :

14 a)
$$\begin{cases} \frac{2x-4}{3} - \frac{y-1}{2} = -\frac{7}{6} \\ \frac{x-y}{2} - \frac{9-4y}{15} = \frac{2x-1}{5} \end{cases}$$
 b) **7**
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y-1} = 10 \\ \frac{5}{x} - \frac{4}{y-1} = 20 \end{cases}$$

- 2) Résoudre les systèmes d'équations suivants avec la méthode de Cramer :

10 a)
$$\begin{cases} 5x + 3y = 11 \\ -7x + 4y = 4 \end{cases}$$
 b) **5**
$$\begin{cases} 12x + 11y = 6 \\ -2x + 3y = 28 \end{cases}$$

- 3) Résoudre et discuter les systèmes d'équations paramétriques suivants :
(utiliser la méthode de Cramer)

22 a)
$$\begin{cases} mx + 2y = 4 \\ mx + (m+1)y = m+3 \end{cases}$$
 b) **12**
$$\begin{cases} x + 3y = a \\ bx + 6y = 4 \end{cases}$$

46 pts

$$1a) \left\{ \begin{array}{l} \frac{2x-4}{3} - \frac{y-1}{2} = \frac{-7}{6} \\ \frac{x-y}{2} - \frac{9-4y}{15} = \frac{2x-1}{5} \end{array} \right| \begin{array}{l} 6 \\ 30 \end{array} \quad \text{et } (x; y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - 8 - 3y + 3 = -7 \\ 15x - 15y - 18 + 8y = 12x - 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - 3y = -2 \\ 3x - 7y = 12 \end{array} \right. \quad 1$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3y-2}{4} \\ x = \frac{12+7y}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{3y-2}{4} = \frac{12+7y}{3} \quad \text{et } y = \frac{-54}{19} \\ x = \frac{12+7 \cdot \frac{-54}{19}}{3} = \frac{-50}{19} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} * \quad & \frac{3y-2}{4} = \frac{12+7y}{3} \\ \Leftrightarrow & 9y - 6 = 48 + 28y \\ \Leftrightarrow & 19y = -54 \\ \Leftrightarrow & y = \frac{-54}{19} \end{aligned} \quad 1$$

$$\begin{aligned} ** \quad & \frac{12+7 \cdot \frac{-54}{19}}{3} = \frac{\frac{228-378}{19}}{3} \\ & = \frac{-150}{19 \cdot 3} = \frac{-50}{19} \end{aligned} \quad 1$$

$$\Leftrightarrow (x; y) \in \left\{ \left(\frac{-50}{19}; \frac{-54}{19} \right) \right\}$$

1

7

1b) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{7} = 10 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{7} = 20 \end{cases}$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\left(\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \text{ et } y = \frac{1}{7} \\ x + 2y = 10 \\ 5x - 4y = 20 \end{array} \right)$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \text{ et } y = \frac{1}{7} \\ x + 2y = 10 \\ 3x + 2y = 40 \end{array} \right\}$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} = \frac{40}{7} \text{ et } x = \frac{2}{40} \\ y = \frac{10 - \frac{40}{7}}{2} = \frac{30}{14} = \frac{15}{7} \end{array} \right\}$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} = \frac{40}{7} \text{ et } x = \frac{2}{40} \\ y = \frac{15}{7} \text{ et } y = \frac{2}{15} \end{array} \right\}$ et $(x,y) \in \left\{ \left(\frac{2}{40}, \frac{15}{7} \right) \right\}$

2a) avec Cramér:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 11 \\ -7x + 4y = 4 \end{cases}$$
 et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Leftrightarrow D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} = 20 + 21 = 41$ et $D_x = \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 44 - 12 = 32$

$\Leftrightarrow D_y = \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} = 20 + 77 = 97$

et $(x,y) \in \left\{ \left(\frac{32}{41}, \frac{97}{41} \right) \right\}$

2c) $\begin{cases} 12x + 11y = 6 \\ -2x + 3y = 28 \end{cases}$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Leftrightarrow D = \begin{vmatrix} 12 & 11 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 36 + 22 = 58$ et $D_x = \begin{vmatrix} 6 & 11 \\ 28 & 3 \end{vmatrix} = \cancel{18 + 308} \quad 18 - 308 = -290$

$\Leftrightarrow D_y = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ -2 & 28 \end{vmatrix} = 12 \cdot 28 + 12 = 336 + 12 = 348$

5 et $(x,y) \in \left\{ \left(\frac{-290}{58}, \frac{348}{58} \right) \right\}$

$\Leftrightarrow (x,y) \in \left\{ \left(\frac{162}{29}, 6 \right) \right\}$

3) a) $\begin{cases} mx + 2y = 4 \\ mx + (m+1)y = m+3 \end{cases}$ et $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D = \begin{vmatrix} m & 2 \\ m & m+1 \end{vmatrix} = m^2 + m - 2m = m^2 - m = m(m-1) \\ \text{et } D_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ m+3 & m+1 \end{vmatrix} = 4m+4 - 2m-6 = 2m-2 = 2(m-1) \\ \text{et } D_y = \begin{vmatrix} m & 4 \\ m & m+3 \end{vmatrix} = m^2 + 3m - 4m = m^2 - m = m(m-1) \\ \text{et } m=0 \text{ et } D=0 \text{ et } D_x = -2 \neq 0 \text{ et } D_y = 0 \text{ et } \begin{cases} 0x+2y=4 \\ 0x+y=3 \end{cases} \\ \text{et } (x, y) \in \emptyset \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} m=1 \text{ et } D=0 = D_x = D_y \text{ et } \begin{cases} x+2y=4 \\ (x+2y)=4 \end{cases} \\ \text{et } (x, y) \in \{(4-2k, k) \mid k \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} m \notin \{0, 1\} \text{ et } (x, y) \in \left\{ \left(\frac{2}{m}, 1 \right) \right\} \end{cases}$$

10

3b) $\begin{cases} x+3y = a \\ 2x+6y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6-3 \cdot 2 = 3(2-\ell) \\ D_x = \begin{vmatrix} a & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6a-12 = 6(a-2) \\ D_y = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4-a \cdot 2 = 4-2a \end{cases}$

$$\text{et } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et } \begin{cases} \ell=2 \text{ et } (x, y) \in \left\{ \left(\frac{a-2}{2}, \frac{4-2a}{3} \right) \right\} \\ \text{ou} \\ \ell=2 \text{ et } D=0 \text{ et } D_x = 6(a-2) \text{ et } D_y = 4-2a = 2(2-a) \\ \text{et } \begin{cases} a=2 \text{ et } D=D_x=D_y=0 \text{ et } \begin{cases} x+3y=2 \\ 2x+6y=4 \end{cases} \text{ et } (x, y) \in \{(2-3k, k) \mid k \in \mathbb{R}\} \\ \text{ou} \\ a \neq 2 \text{ et } D=0 \text{ et } D_x \neq 0 \text{ et } (x, y) \in \emptyset \end{cases} \end{cases}$$

12