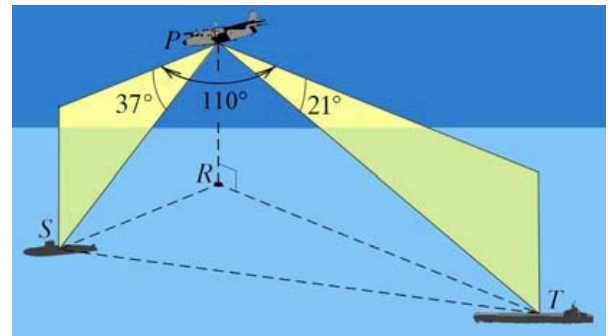


## Exercices de trigonométrie - final

- 1) Soit un triangle  $\triangle ABC$ . On donne  $\beta = 20^\circ$ ,  $a = 4$ ,  $b = 2$  ;  
calculer  $c$ ,  $\alpha$ , et  $\gamma$  et illustrer les solutions à l'aide d'**une figure exacte (à l'échelle)**  
en précisant quel est l'angle limite  $\beta'$  pour lequel on peut construire ce triangle  $\triangle ABC$ .

- 2) a) On donne un triangle  $\triangle ABC$  et  $a = BC = \sqrt{6}$ ,  $b = AC = \sqrt{3}$  et  $c = AB = 1$ .  
Faire **une figure d'étude à l'échelle**.  
Calculer  $\beta$  et la distance  $AA'$  avec  $A'$  milieu du côté  $[B,C]$ .  
b) Que peut-on conjecturer de la médiane  $(AA')$  ?  
Prouve ta conjecture.

- 3) Un avion de reconnaissance  $P$ , volant à 3000 m au-dessus d'un point  $R$  à la surface de l'eau, détecte un sous-marin  $S$  avec un angle de dépression de  $37^\circ$  et un bateau de ravitaillement  $T$  avec un angle de dépression de  $21^\circ$ , comme le montre la figure ci-contre. De plus, l'angle  $\angle SRT$  est mesuré à  $110^\circ$ . Calculer la distance entre le sous-marin  $S$  et le bateau de ravitaillement  $T$ .



- 4) Soit un triangle  $\triangle ABC$ . On donne  $a = BC = 2$ ,  $b = AC = 1$ .  
Calculer l'angle limite en  $B$  qui permet de construire ou non ce triangle  $\triangle ABC$   
et faire une figure d'étude claire et précise illustrant cette question.

- 5) Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

- a)  $3\sin(x) + 4\cos(x) = 5$   
b)  $2\sin^2(x) - 3\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) = 0$   
c)  $1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$   
d)  $2\cos^2(x) - (\sqrt{3} + 4)\cos(x) + 2\sqrt{3} = 0$   
e)  $\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{8}{3}$

- 6) Prouver les égalités suivantes :

- a)  $\sin^4(x) - \cos^4(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x)$   
b)  $\tan(2x) - \tan(x) = \frac{\tan(x)}{\cos(2x)}$  (préciser d'abord le domaine de validité de cette égalité)  
c)  $\cos(a) \sin(b - c) + \cos(b) \sin(c - a) + \cos(c) \sin(a - b) = 0$

## Série finale

- 1) Données :
- \* un triangle ABC
  - \*  $\angle \beta = \angle ABC$  et  $\beta = 20^\circ$
  - \*  $a = BC = 4$  et  $b = AC = 2$
  - \* calculer  $c = AB$ ,  $\alpha$  et  $\gamma$ .

Résolution :

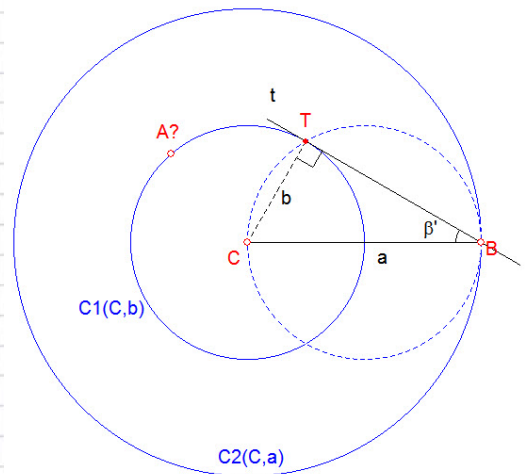
soit  $\mathcal{C}_1(C, a)$  et  $\mathcal{C}_2(C, b)$

et la tangente  $t = BT$

issue de B au cercle  $\mathcal{C}_1$

calcul de  $\beta'$  où  $\angle \beta' = \angle CBT$

$$\text{on a } \sin(\beta') = \frac{CT}{CB} = \frac{b}{a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta' = 30^\circ$$



ainsi  $\beta = 20^\circ$  et  $\beta < \beta'$ , donc le problème admet 2 solutions.

\* On a :  $a = 4$ ,  $b = 2$  et  $\beta = 20^\circ$  d'où  $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$

$$\Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{a}{b} \sin(\beta) = \frac{4}{2} \sin(20^\circ)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 43,16^\circ \text{ (calculatrice)}$$

$$\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1 = 136,84^\circ$$

$$\text{d'où } \gamma_1 = 180^\circ - \alpha_1 - \beta = 116,84^\circ$$

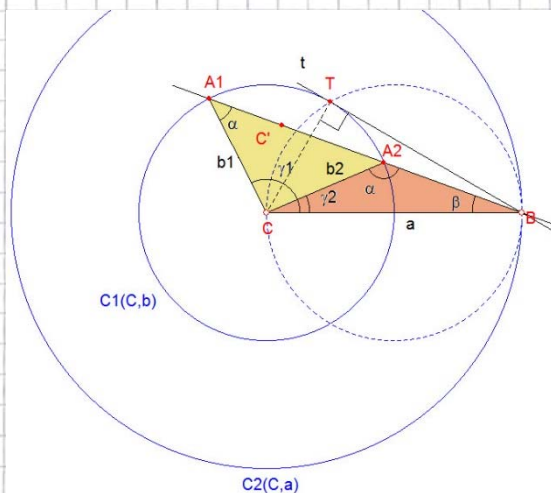
$$\gamma_2 = 180^\circ - \alpha_2 - \beta = 23,16^\circ$$

\* de plus  $\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

$$\Rightarrow c = b \cdot \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\beta)}$$

$$\text{d'où } c_1 = b \cdot \frac{\sin(\gamma_1)}{\sin(\beta)} \approx 5,22$$

$$\text{et } c_2 = b \cdot \frac{\sin(\gamma_2)}{\sin(\beta)} \approx 2,30$$



$\beta = 20,0^\circ$   
 $\alpha_1 = 43,16^\circ$   
 $\alpha_2 = 136,84^\circ$   
 $\gamma_1 = 116,84^\circ$   
 $\gamma_2 = 23,16^\circ$   
 $a = 4$  et  $b_1 = b_2 = 2$   
 $c_1 = A_1B = 5,22$   
 $c_2 = A_2B = 2,30$

- 2) a) Données :
- \* un triangle ABC
  - \*  $a = BC = \sqrt{6}$ ,  $b = AC = \sqrt{3}$  et  $c = AB = 1$
  - \* calculer  $\beta$  et  $x = AA'$ ,  $A'$  milieu  $[B, C]$

Résolution :

avec le thm du cosinus :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\beta) = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}$$

$$\text{a.m. : } \cos(\beta) = \frac{3 - 6 - 1}{-2\sqrt{6}} = \frac{-4}{-2\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow \beta = 35,26^\circ$$

remarque : ce triangle ABC est bien constructible  
car  $|b - c| < a < b + c$

en effet :  $\sqrt{3} - 1 < \sqrt{6} < \sqrt{3} + 1$

$$\text{car } \sqrt{3} - 1 < \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{3} < \sqrt{6} + 1 \Leftrightarrow 3 < 6 + 1 + 2\sqrt{6} \\ \Leftrightarrow -4 < \sqrt{6}$$

$$\text{et } \sqrt{6} < \sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow 6 < 3 + 1 + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2 < 2\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow 1 < \sqrt{3} \Leftrightarrow 1 < 3$$

\* calcul de  $x = AA'$  :

dans le triangle  $AA'B$  avec le thm. du cosinus :

$$AA'^2 = A'B^2 + AB^2 - 2A'B \cdot AB \cdot \cos(\beta)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

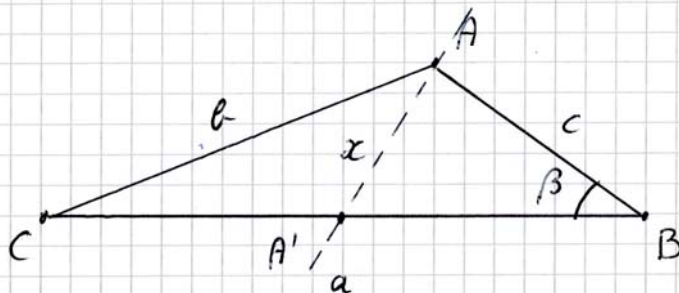
$$\text{a.m. : } x^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + 1^2 - \sqrt{6} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{3}{2} + 1 - 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

réponse :  $AA' = \frac{\sqrt{2}}{2}$

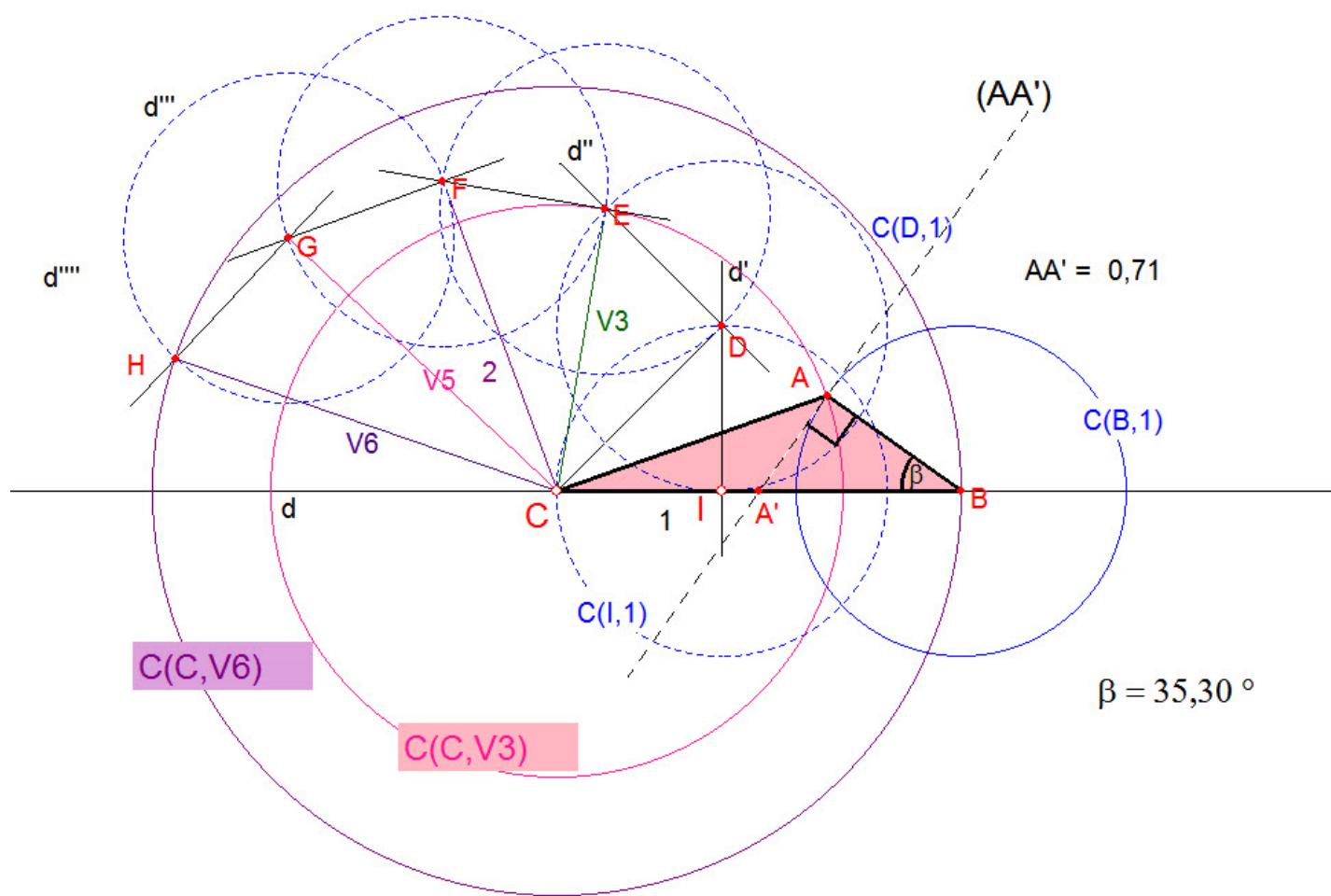
e) Que peut-on conjecturer de la médiane  $(AA')$  ?

a-t-on  $(AA') \perp (AB)$  ? avec Pythagore réciproque :  $A'B^2 = BA^2 + AA'^2$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 = c^2 + x^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \text{ vrai !}$$



# Construction exacte du triangle ABC



### exercice 3

- Données:
- \* altitude de l'aéronef:  $PR = 3000 \text{ [m]}$
  - \* angles de dépression:  $\alpha = 37^\circ$  et  $\beta = 21^\circ$
  - \*  $\gamma = 110^\circ$  et  $\angle P = \angle SRT$
  - \* Calculer  $ST$  la distance "sous-marin - bateau"

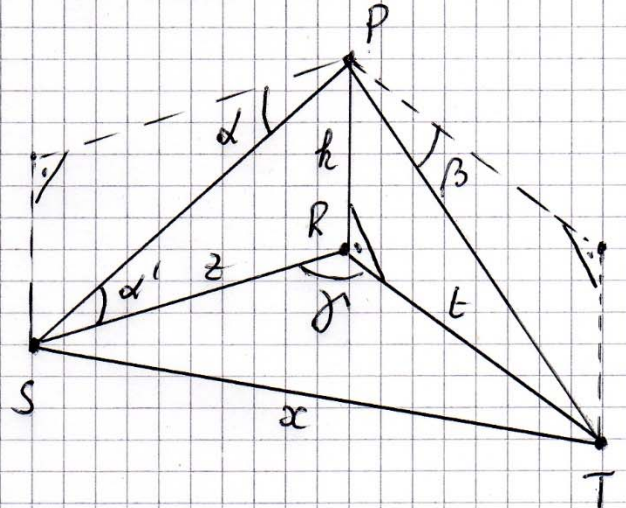
### Résolution:

\* dans le  $\triangle SRP$ , rectangle en  $R$ :

$$\tan(\alpha') = \frac{PR}{SR} \text{ et } \alpha' = \alpha \text{ (alt-int.)}$$

\* dans le  $\triangle TPR$ , rect. en  $R$ :

$$\tan(\beta') = \frac{PR}{RT} \text{ et } \beta' = \beta \text{ (alt-int.)}$$



\* posons  $h = PR$ ,  $z = SR$  et  $t = RT$  et  $x = ST$

$$\text{d'où } \tan(\alpha) = \frac{h}{z} \Leftrightarrow z = \frac{h}{\tan(\alpha)} \quad (1)$$

$$\tan(\beta) = \frac{h}{t} \Leftrightarrow t = \frac{h}{\tan(\beta)} \quad (2)$$

\* ds le triangle  $\triangle STR$  on a:  $x^2 = z^2 + t^2 - 2z \cdot t \cdot \cos(\gamma)$  (3)

(1) et (2) dans (3):

$$x^2 = \left( \frac{h}{\tan(\alpha)} \right)^2 + \left( \frac{h}{\tan(\beta)} \right)^2 - 2 \cdot \frac{h}{\tan(\alpha)} \cdot \frac{h}{\tan(\beta)} \cdot \cos(\gamma)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = h^2 \left( \frac{1}{\tan^2(\alpha)} + \frac{1}{\tan^2(\beta)} - \frac{2 \cos(\gamma)}{\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)} \right)$$

a.n:

$$x \cong 9910,14 \text{ [m]}$$
$$\cong 9,9 \text{ [km]}$$

- 4) Données:
- \* triangle ABC
  - \*  $a = BC = 2$ ,  $b = AC = 1$
  - \* calculer  $\beta$  pour que ce triangle soit constructible.

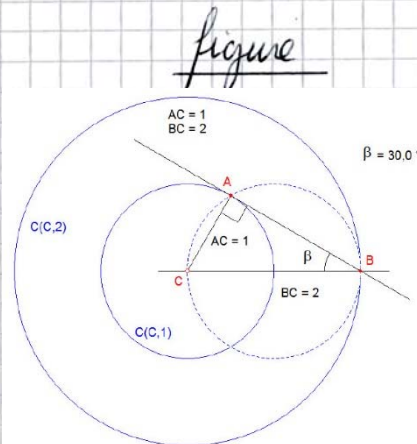
Résolution:

dans le triangle ABC  
rectangle en A:

$$\sin(\beta') = \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \beta' = 30^\circ$$

Donc si  $\beta < 30^\circ$  le triangle est constructible.



5) Résoudre les équations suivantes :

a)  $3 \sin(x) + 4 \cos(x) = 5$  et  $x \in \mathbb{R}$

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5} \sin(x) + \frac{4}{5} \cos(x) = 1 \quad \downarrow :5$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha) \sin(x) + \cos(\alpha) \cos(x) = 1$$

$$\text{on } \begin{cases} \sin(\alpha) = \frac{3}{5} \\ \cos(\alpha) = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \cos(0)$$

$$\Leftrightarrow \alpha \approx 0,64 \text{ radian} \\ (\alpha \approx 36,87^\circ)$$

$$\Leftrightarrow x - \alpha = 0 + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x \in \{ 0,64 + k2\pi \}$$

5b)  $2 \sin^2(x) - 3 \sin(x) \cos(x) + \cos^2(x) = 0$  et  $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 2 \tan^2(x) - 3 \tan(x) + 1 = 0 \quad \downarrow \cos(x) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (\tan(x) - 1) \cdot (2 \tan(x) - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan(x) = 1 \quad \text{ou} \quad \tan(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{ou} \quad x \approx 0,46 + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi ; 0,46 + k\pi \right\}$$

$$5c) \quad 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0 \quad \text{et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos(x) + 2\cos^2(x) - 1 + \cos(x)(4\cos^2(x) - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{1} + \cos(x) + 2\cos^2(x) - \cancel{1} + 4\cos^3(x) - 3\cos(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3(x) + 2\cos^2(x) - 2\cos(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) (4\cos^2(x) + 2\cos(x) - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = 0 \quad \text{ou} \quad 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad (2\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad \cos(x) = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \cos(x) = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{ou} \quad \cos(x) = \cos(\pi)$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{3} + k2\pi, -\frac{\pi}{3} + k2\pi ; \pi + k2\pi \right\}$$

$$5d) \quad 2\cos^2(x) - (\sqrt{3} + 4)\cos(x) + 2\sqrt{3} = 0 \quad \text{et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2(x) - \sqrt{3}\cos(x) - 4\cos(x) + 2\sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x)(2\cos(x) - \sqrt{3}) - 2(2\cos(x) - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos(x) - \sqrt{3}) \underbrace{(\cos(x) - 2)}_{\neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi ; -\frac{\pi}{6} + k2\pi \right\}$$

$$\text{Se)} \quad \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{8}{3} \quad \text{et } x \in \mathbb{R} - \left\{ k \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\sin^2(x) \cdot \cos^2(x)} = \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\cos(2x)}{4 \sin^2(x) \cos^2(x)} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\cos(2x)}{[2 \sin(x) \cos(x)]^2} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\cos(2x)}{\sin^2(2x)} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \cos(2x) = 2 \sin^2(2x) \Leftrightarrow 3 \cos(2x) = 2(1 - \cos^2(2x))$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2(2x) + 3 \cos(2x) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2(2x) + 4 \cos(2x) - \cos(2x) - 2 = 0$$

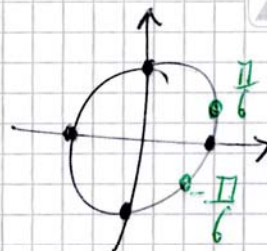
$$\Leftrightarrow 2 \cos(2x) (\cos(2x) + 2) - (-\cos(2x) + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \cos(2x) - 1) \cdot \underbrace{(-\cos(2x) + 2)}_{\neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\cos(2x) = \frac{1}{2} = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi; -\frac{\pi}{6} + k\pi \right\} \cap D$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi; -\frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$$



6) a) *Proven* :

$$\sin^4(x) - \cos^4(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow [\sin^2(x) - \cos^2(x)] \cdot \underbrace{[\sin^2(x) + \cos^2(x)]}_{=1} = \sin^2(x) - \cos^2(x)$$

*q.e.d.*

b)  $\tan(2x) - \tan(x) = \frac{\tan(x)}{\cos(2x)} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\}$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)} - \tan(x) = \frac{\tan(x)}{\cos(2x)} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} : \tan(x) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1 - \tan^2(x)} - 1 = \frac{1}{\cos(2x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1 - \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} - (-\cos^2(x) + \sin^2(x)) = \frac{1}{\cos^2(x) - \sin^2(x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cos^2(x)}{\cos^2(x) - \sin^2(x)} - 1 = \frac{1}{\cos^2(x) - \sin^2(x)} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \times (\cos^2(x) - \sin^2(x))$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2(x) - \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \text{q.e.d.}$$

c)  $\cos(a) \sin(b-c) + \cos(b) \sin(c-a) + \cos(c) \sin(a-b) = 0$   
 $\forall \{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \cos(a) \cdot [\sin(b) \cos(c) - \cos(b) \sin(c)] + \cos(b) [\sin(c) \cos(a) - \cos(c) \sin(a)]$$

$$+ \cos(c) [\sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\cos(a) \sin(b) \cos(c)} - \cancel{\cos(a) \cos(b) \sin(c)} + \cancel{\cos(b) \sin(c) \cos(a)} - \cancel{\cos(b) \cos(c) \sin(a)}$$

$$+ \cancel{\cos(c) \sin(a) \cos(b)} - \cancel{\cos(c) \cos(a) \sin(b)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \quad \text{q.e.d.}$$