

Chapitre 7 Trigonométrie

§1 - Vecteurs orthogonaux

§ 1 Vecteurs orthogonaux

Définition (1) Deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont dits **orthogonaux** si et seulement si l'un des deux est nul ou si $(AB) \perp (CD)$.

Notation: $\vec{AB} \perp \vec{CD} \Leftrightarrow \vec{O} \in \{\overline{AB}; \overline{CD}\} \text{ ou } (AB) \perp (CD)$
 (perpendiculaires)

* Théorème (1):

On a alors la propriété suivante.

Les multiples de deux vecteurs orthogonaux sont orthogonaux et réciproquement.

$$\forall [x, y] \subset \mathbb{R}^* \quad \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x\vec{u} \perp y\vec{v}$$

(H) $\{x, y\} \subset \mathbb{R}^*$ et $\{\vec{u}, \vec{v}\} \subset \mathcal{U}_2$

(T) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x\vec{u} \perp y\vec{v}$

(D) pour démonstration

* Théorème (2): (forme vectorielle du thm de Pythagore)

(H) $\{\vec{u}, \vec{v}\} \subset \mathcal{U}_2$

(T) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

(D) 1) $\vec{O} \in \{\vec{u}, \vec{v}\}$

alors: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{O} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{O}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$
 et $\vec{u} = \vec{O}$
 (ou $\vec{v} = \vec{O}$) $\Leftrightarrow \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$

2) $\vec{O} \notin \{\vec{u}, \vec{v}\}$ et $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{BC}$

Ainsi $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{AB} + \vec{BC}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2 = AC^2$

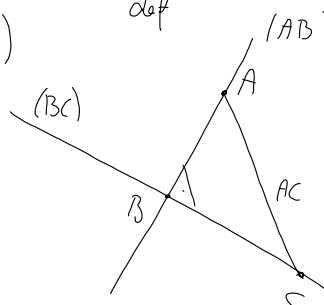
ou $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{AB} \perp \vec{BC} \Leftrightarrow (AB) \perp (BC)$
 (d'après Charles)

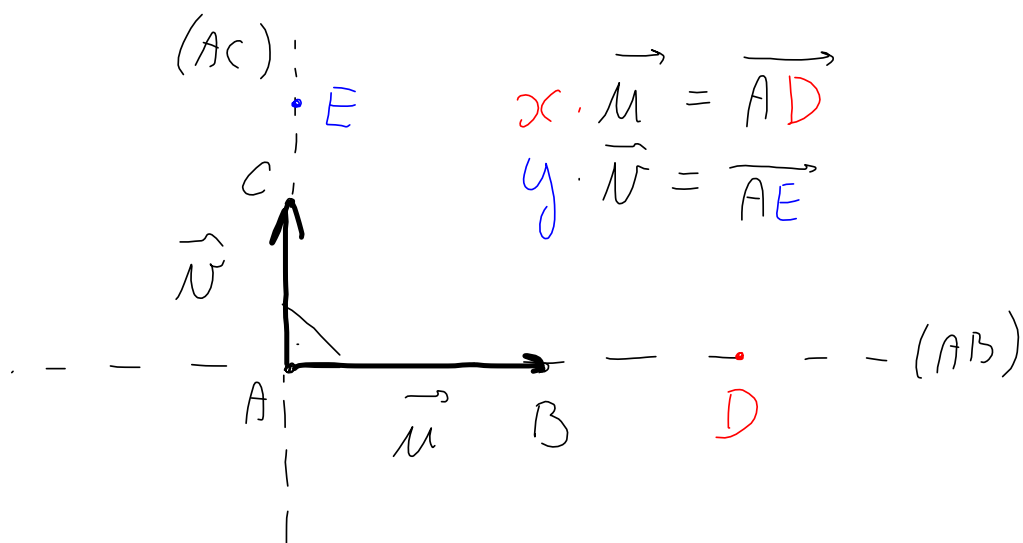
Alors $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (Pythagore)

$= \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2$

$= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

Q.E.D.





Définition (1) $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée B.O.N. si et seulement si

$$\vec{i} \perp \vec{j} \quad \text{et} \quad \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$$

* Théorème (3) : (H) $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée (B.O.N.)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \in U_2$$

$$(T) \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(D) \quad \text{Soit } \|\vec{v}\|^2 = \|(x \cdot \vec{i}) + (y \cdot \vec{j})\|^2 \underset{\text{thm (2)}}{=} \|x \cdot \vec{i}\|^2 + \|y \cdot \vec{j}\|^2$$

$$\underset{(*)}{=} (|x| \cdot \|\vec{i}\|)^2 + (|y| \cdot \|\vec{j}\|)^2$$

$$\text{et } x \cdot \vec{i} \perp y \cdot \vec{j} \text{ et thm (1)}$$

$$\text{et } \vec{i} \perp \vec{j} \text{ (H)}$$

$$\underset{\text{alg}}{=} |x|^2 \cdot \underbrace{\|\vec{i}\|^2}_{=1} + |y|^2 \cdot \underbrace{\|\vec{j}\|^2}_{=1} \text{ (H)}$$

$$\underset{\text{alg}}{=} x^2 \cdot 1 + y^2 \cdot 1 = x^2 + y^2$$

$$\text{Ainsi } \|\vec{v}\|^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \underbrace{\|\vec{v}\|}_{\geq 0} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

q.e.d.

cf cours U_2

$$(*) \quad \|\vec{x} \cdot \vec{i}\| = |x| \cdot \|\vec{i}\|$$

Définition Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dit **orthonormé** (R.O.N.) si et seulement si la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée.

* Théorème (4) :

(H) $(O, \vec{i}, \vec{j})$ repère orthonormé (R.O.N.)

$\{A, B\} \subset P$ et $A(a_1; a_2)$ et $B(b_1; b_2)$

(T) $AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

(D) $AB \stackrel{V_2}{=} \|\overrightarrow{AB}\| \stackrel{Thm 3}{=} \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

ou $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$ (Thm 15) *gl*

Théorème : (5)

(H) $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ B.O.N.

$$\{\vec{u}, \vec{v}\} \subset \mathcal{U}_2 \quad \text{et} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

(T) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x \cdot x' + y \cdot y' = 0$

(D) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \text{Hm(2)} \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

$$\text{Hm(3)} \quad \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x+x')^2 + (y+y')^2} \right)^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 + \left(\sqrt{x'^2 + y'^2} \right)^2$$

$$\text{alg} \quad \Leftrightarrow (x+x')^2 + (y+y')^2 = (x^2 + y^2) + (x'^2 + y'^2)$$

$$\text{alg} \quad \Leftrightarrow \cancel{x^2} + \cancel{2xx'} + \cancel{x'^2} + \cancel{y^2} + \cancel{2yy'} + \cancel{y'^2} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{x'^2} + \cancel{y'^2}$$

$$\text{alg.} \quad \Leftrightarrow 2(x \cdot x' + y \cdot y') = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot x' + y \cdot y' = 0$$

q.f.d.

* Soit $\{\vec{u}, \vec{v}\} \subset V_2$ et une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$
et $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ B.O.N.

$$1) \quad \vec{u}, \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow x \cdot y' - x' \cdot y = 0$$

$$2) \quad \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x \cdot x' + y \cdot y' = 0$$

* Qui est qu'un cercle $\mathcal{C}(A, r)$ de centre A , $A \in \mathbb{P}$
et de rayon r , $r \in \mathbb{R}_+^*$

Réponse: $M \in \mathcal{C}(A, r) \Leftrightarrow AM = r$

Soit un repère $\mathcal{B} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ R.O.N.

et $A(\alpha; \beta)$ et $M(x, y)$:

$$M(x, y) \in \mathcal{C}(A, r) \Leftrightarrow AM = r$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = r$$

$$\text{alg} \Leftrightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

dans R.O.N.

équation cartésienne
du cercle $\mathcal{C}(A, r)$

Exemple: Soit $\mathcal{B} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ R.O.N.

et le cercle $\mathcal{C}(O, r)$:

alors une équation cartésienne de $\mathcal{C}(O, r)$

$$\text{est : } x^2 + y^2 = r^2$$