

Examen de mathématique - I

(Algèbre – Chap.1-2)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^3 + 7x^2 + 12x = 0$

b) $\frac{2x+5}{48} - \left(3x - \frac{1-2x}{3}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2x+5}{16}$

c) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

d) $x^2 - \frac{17}{6}x = \frac{1}{2}$

e) $x^2 + 2ax + (a^2 - b^2) = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{x}{x-3} - \frac{1}{2x+3} = 1$

b) $\frac{2x+1}{x+2} - \frac{x+3}{x-5} = \frac{7(1-2x)}{x^2-3x-10}$

3) Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}$ les équations paramétriques suivantes :

a) $\frac{1}{x} + \frac{a}{b-a} = \frac{a}{b+a} + \frac{2ab}{b^2 - a^2}$

b) $m^2(x-1) - 2(m+1)x = m+x$

$$1) \quad a) \quad x^3 + 7x^2 + 12x = 0 \quad \text{et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + 7x + 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+3)(x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{0; -3; -4\}$$

$$\begin{cases} m+n = +7 \\ m \cdot n = +12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 4 \end{cases}$$

$$b) \quad \frac{2x+5}{48} - \left(3x - \frac{1-2x}{3} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2x+5}{16} \quad \text{et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+5}{48} - 3x + \frac{1-2x}{3} = \frac{12 - (2x+5)}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+5 - 48 \cdot 3x + 16(1-2x)}{48} = \frac{3(12-2x-5)}{48}$$

$$\Leftrightarrow 2x+5 - 144x + 16 - 32x = -6x + 21$$

$$\Leftrightarrow 2x - 144x - 32x + 6x = 21 - 5 - 16$$

$$\Leftrightarrow (2 - 144 - 32 + 6) \cdot x = 0$$

$$\Leftrightarrow (-168) \cdot x = 0 \quad (\in \mathbb{D})$$

$$\Leftrightarrow x \in \{0\}$$

$$c) \quad x^8 - 17x^4 + 16 = 0 \quad \text{et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y = x^4 \quad \text{et} \quad y^2 - 17y + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = x^4 \quad \text{et} \quad (y-1)(y-16) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4-1)(x^4-16) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(\underbrace{x^2+1}_{\neq 0})(x^2-4)(\underbrace{x^2+4}_{\neq 0}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{1; -1; 2; -2\}$$

$$\begin{cases} m+n = -17 \\ m \cdot n = +16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = -16 \end{cases}$$

$$d) \quad x^2 - \frac{17}{6}x = \frac{1}{2} \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{17}{6}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 17x - 3 = 0$$

$$\begin{cases} m+n = -17 \\ m \cdot n = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -18 \\ n = +1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 18x + x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x(x-3) + (x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(6x+1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{3; -\frac{1}{6}\right\}$$

$$e) \quad x^2 + 2ax + (a^2 - b^2) = 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow [x + (a+b)] \cdot [x + (a-b)] = 0$$

$$\begin{cases} m+n = 2a \\ m \cdot n = a^2 - b^2 \\ \quad = (a-b)(a+b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-a-b; -a+b\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = a-b \\ n = a+b \end{cases}$$

$$2) a) \quad \frac{x}{x-3} - \frac{1}{2x+3} = 1 \text{ et } x \in \mathbb{R} - \underbrace{\left\{3; -\frac{3}{2}\right\}}_D$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(2x+3) - (x-3) - (x-3)(2x+3)}{(x-3)(2x+3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - x + 3 - 2x^2 + 3x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x = -12 \Leftrightarrow x = -\frac{12}{5} \quad (\in D)$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{12}{5}\right\}$$

$$b) \quad \frac{2x+1}{x+2} - \frac{x+3}{x-5} = \frac{7(1-2x)}{x^2-3x-10} \text{ et } x \in \mathbb{R} - \{-2; 5\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+1)(x-5) - (x+3)(x+2)}{x^2-3x-10} = \frac{7-14x}{x^2-3x-10}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 9x - 5 - x^2 - 5x - 6 - 7 + 14x = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{18})(x + \sqrt{18}) = 0 \Leftrightarrow (x - 3\sqrt{2})(x + 3\sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{3\sqrt{2}; -3\sqrt{2}\}$$

$$3) \quad a) \quad \frac{1}{x} + \frac{a}{b-a} = \frac{a}{b+a} + \frac{2ab}{b^2-a^2} \quad \text{et } x \in \mathbb{R}^*$$

$$\Rightarrow a=b \text{ ou } a=-b \text{ et } x \in \emptyset$$

$$\text{ou } a \neq b \text{ et } a \neq -b \text{ et } \frac{b-a+ax}{x(b-a)} = \frac{a(b-a)+2ab}{b^2-a^2}$$

$$\text{et } \frac{ax+b-a}{x(b-a)} = \frac{ab-a^2+2ab}{b^2-a^2}$$

$$\text{et } \frac{(ax+b-a)(b+a)}{x(b^2-a^2)} = \frac{(3ab-a^2)x}{x(b^2-a^2)}$$

$$\text{et } ax(b+a) + (b^2-a^2) = 3abx - a^2x$$

$$\text{et } abx + a^2x - 3abx + a^2x = a^2 - b^2$$

$$\text{et } (ab + a^2 - 3ab + a^2)x = a^2 - b^2$$

$$\text{et } (2a^2 - 2ab)x = (a-b)(a+b)$$

$$\text{et } 2a(a-b)x = (a-b)(a+b)$$

$$\text{et } 2a \cdot x = a+b$$

$$\text{et } \begin{cases} a=0 \text{ et } 0 \cdot x = \frac{b}{\neq 0} \text{ et } x \in \emptyset \\ \text{ou} \\ a \neq 0 \text{ et } x \in \left\{ \frac{a+b}{2a} \right\} \end{cases}$$

(rem: comme $a \neq -b$, $\frac{a+b}{2a} \in \mathbb{D}$)

$$e) \quad m^2(x-1) - 2/(m+1)x = m+x \quad \text{et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow m^2x - m^2 - 2mx - 2x = m+x$$

$$\Rightarrow m^2x - 2mx - 2x - x = m^2 + m$$

$$\Rightarrow (m^2 - 2m - 3) \cdot x = m/(m+1)$$

$$\Rightarrow (m-3)/(m+1) \cdot x = m/(m+1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=-1 \text{ et } 0 \cdot x = 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ m=3 \text{ et } 0 \cdot x = 12 \text{ et } x \in \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \neq -1, 3 \text{ et } x \in \left\{ \frac{m}{m-3} \right\} \end{cases}$$