

Examen de mathématique — I

(Algèbre – Chap.1-2)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^4 + 8x^3 + 15x^2 = 0$

b) $\frac{2x-7}{35} - \left(2x - \frac{3x+4}{5}\right) = \frac{1}{7} - \frac{x-9}{5}$

c) $4x^2 - 20x + 25 = 0$

d) $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$

e) $2x^2 - \frac{13}{3}x = -2$

f) $3x^2 - 3x + 18 = 0$

g) $x^2 - (a^2+b^2)x + a^2b^2 = 0$

2) Résoudre les équations suivantes :

a) $\frac{5}{x-3} - \frac{2}{x-4} = \frac{3}{x-5}$

b) $\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x} = \frac{x^2}{x^2+x}$

3) Résoudre et discuter les équations paramétriques suivantes :

a) $b + \frac{ax}{b} = \frac{bx}{a} + a$

b) $\frac{a+b}{x} - \frac{2b}{a-b} = 2 - \frac{a-b}{x}$

L

1) a) $x^4 + 8x^3 + 15x^2 = 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 8x + 15) = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x+3)(x+5) = 0$

$\Leftrightarrow x \in \{0; -3; -5\}$

$$\begin{cases} m+n=8 \\ m \cdot n=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ n=5 \end{cases}$$

b) $\frac{2x-7}{35} - \left(2x - \frac{3x+4}{5}\right) = \frac{1}{7} - \frac{x-9}{5}$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2x-7 - (70x - 21x - 28) = 5 - 7x + 63 \quad \times 35$

$\Leftrightarrow 2x-7-49x+28 = 68-7x$

$\Leftrightarrow -47x = 47$

$\Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{47}{40}\right\}$

c) $4x^2 - 20x + 25 = 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (2x-5)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{5}{2}\right\}$

d) $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y = x^3$ et $y^2 - 26y - 27 = 0$

$\Leftrightarrow y = x^3$ et $(y-27)(y+1) = 0$

$$\begin{cases} m+n=-26 \\ m \cdot n=-27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-27 \\ n=+1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x^3-27)(x^3+1) = 0$

* $x^2 + 3x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3) \underbrace{(x^2+3x+9)}_{\neq 0} \underbrace{(x+1)}_{\neq 0} \underbrace{(x^2-x+1)}_{\neq 0} = 0$

$\Leftrightarrow \Delta = 9 - 36 = -27 < 0$

et $x \in \emptyset$

$\Leftrightarrow x \in \{3; -1\}$

* $x^2 - x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

et $x \in \emptyset$

e) $2x^2 - \frac{13}{3}x = -2$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 6x^2 - 13x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 6x^2 - 9x - 4x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 3x(2x-3) - 2(2x-3) = 0$

$\Leftrightarrow (2x-3)(3x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right\}$

$$\begin{cases} m+n=-13 \\ m \cdot n=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-9 \\ n=-4 \end{cases}$$

L

$$f) \begin{cases} 3x^2 - 3x + 18 = 0 \\ x^2 - x + 6 = 0 \end{cases} \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$$

$$= 1 - 24 = -23 < 0$$

$$\text{et } x \in \emptyset$$

$$\begin{cases} m+n = -1 \\ m \cdot n = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = ? \\ n = ? \end{cases}$$

$$g) x^2 - (a^2 + b^2)x + a^2 \cdot b^2 = 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (x - a^2) \cdot (x - b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{a^2; b^2\}$$

$$\begin{cases} m+n = -a^2 - b^2 \\ m \cdot n = a^2 \cdot b^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -a^2 \\ n = -b^2 \end{cases}$$

$$2) a) \frac{5}{x-3} - \frac{2}{x-4} = \frac{3}{x-5} \text{ et } x \in \mathbb{R} - \{3; 4; 5\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{x-3} - \frac{2}{x-4} - \frac{3}{x-5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(x-4)(x-5) - 2(x-3)(x-5) - 3(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-4)(x-5)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 5(x^2 - 9x + 20) - 2(x^2 - 8x + 15) - 3(x^2 - 7x + 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 45x + 100 - 2x^2 + 16x - 30 - 3x^2 + 21x - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow -8x + 34 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{17}{4} (\in D) \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{17}{4} \right\}$$

$$b) \frac{x}{x+1} - \frac{2}{x} = \frac{x^2}{x^2+x} \text{ et } x \in \mathbb{R} - \underbrace{\{-1; 0\}}_{\in D}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2(x+1)}{x^2+x} = \frac{x^2}{x^2+x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x = -1 (\notin D)$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$3) a) b + \frac{ax}{b} = \frac{bx}{a} + a$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \text{ ou } b=0 & \text{et } x \in \emptyset \\ \text{ou} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \notin \{a, b\} & \text{et } x \in \mathbb{R} \text{ (domaine)} \\ \text{et } \frac{b^2+ax}{b} = \frac{bx+a^2}{a} \end{cases}$$

$$\text{et } a(b^2+ax) = b(bx+a^2)$$

$$\text{et } ab^2+a^2x = b^2x+a^2b$$

$$\text{et } (a^2-b^2)x = a^2b-ab^2$$

$$\text{et } (a-b)(a+b) \cdot x = ab(a-b)$$

$$\text{et } \begin{cases} a=b & \text{et } 0 \cdot x = 0 & \text{et } x \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-b & \text{et } 0 \cdot x = -b^2/(-2b) = \frac{b^2}{2} \neq 0 & \text{et } x \in \emptyset \\ \text{ou} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \neq b & \text{et } a \neq -b & \text{et } x \in \left\{ \frac{ab}{a+b} \right\} \end{cases}$$

$$b) \frac{a+b}{x} - \frac{2b}{a-b} = 2 - \frac{a-b}{x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b & \text{et } x \in \emptyset \\ \text{ou} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \neq b & \text{et } x \in \mathbb{R}^* \text{ (domaine)} \end{cases}$$

$$\text{et } \frac{(a+b)(a-b) - 2b \cdot x}{x(a-b)} = \frac{2x - a + b}{x}$$

$$\text{et } a^2 - b^2 - 2bx = [2x - (a-b)] \cdot (a-b)$$

$$\text{et } a^2 - b^2 - 2bx = 2x(a-b) - (a-b)^2$$

$$\text{et } a^2 - b^2 - 2bx = 2ax - 2bx - a^2 + 2ab - b^2$$

$$\text{et } 2ax = 2a^2 - 2ab$$

$$\text{et } \begin{cases} a=0 & \text{et } 0 \cdot x = 0 & \text{et } x \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \neq 0 & \text{et } x = a-b & \text{et } x \in \{a-b\} \end{cases}$$