Examen de mathématique - 2

(Chapitre 2 - Second degré)

1) Résoudre dans ℝ :

   a) $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} \geq \sqrt{-x+2}$ b) $\dfrac{2x-3}{\sqrt{x-5}} = \sqrt{4x+1}$

2) Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

   a) $2mx - m = 3 - (m^2 + 3)x$ b) $\left| x^2 - 15x + 41 \right| - 3 = 0$

3) a) Soit $f(x) = (m-2)x^2 + 2(m-3)x + 5m-6$

   1) Calculer m si $x = -3$ est une racine de f, puis calculer l'autre racine ;

   2) calculer m si f n'admet pas de racines ;

   b) Calculer m si l'inéquation suivante $(m-1)x^2 - 2x + 3m-1 < 0$

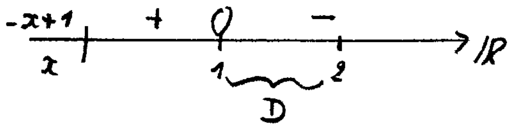
   admet ℝ comme ensemble solution.

Corrigés

1) a) $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} \geqslant \sqrt{-x+2}$ et $x \in [1,2]$

Conditions d'existence :

$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \geqslant 1 \\ -x+2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \geqslant 1 \\ x \leqslant 2 \end{cases}$



$\Leftrightarrow x + 2\sqrt{x}\sqrt{x-1} + (x-1) \geqslant (-x+2)$ et ...

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x(x-1)} \geqslant -3x+3$ et ...

$\Leftrightarrow \underbrace{2\sqrt{x(x-1)}}_{+} \geqslant \underbrace{3(-x+1)}_{-}$ et ...

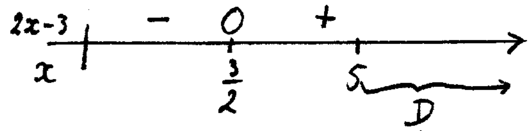
$\Leftrightarrow x \in [1,2]$

b) $\dfrac{2x-3}{\sqrt{x-5}} = \sqrt{4x+1}$ et $x \in]5,+\infty[$

Cond. d'existence :

$\begin{cases} x-5 > 0 \\ 4x+1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x \geqslant -\frac{1}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x > 5$



$\Leftrightarrow \underbrace{2x-3}_{+} = \underbrace{\sqrt{x-5}\cdot\sqrt{4x+1}}_{+}$ et ...

$\Leftrightarrow \cancel{4x^2} - 12x + 9 = \cancel{4x^2} - 19x - 5$ et ...

$\Leftrightarrow 7x = -14$ et ...

$\Leftrightarrow x = -2$ et $x \in]5,+\infty[$

$\Leftrightarrow x \in \emptyset$

2) a) $2mx - m = 3 - (m^2+3)x$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2mx + (m^2+3)x = m+3$

$\Leftrightarrow (m^2+2m+3)\,x = m+3$

$(\Leftrightarrow (m+?)(\ ?\ )\,x = m+3 \quad ?\ )$

$\Leftrightarrow \underbrace{(m^2+2m+3)}_{\neq 0}\,x = m+3$

$m^2+2m+3 = 0$

$\Leftrightarrow \Delta' = 1-3 = -2 < 0$

et $m \in \emptyset$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{m+3}{m^2+2m+3} \Leftrightarrow x \in \left\{ \dfrac{m+3}{m^2+2m+3} \right\}$

b) $|x^2 - 15x + 41| - 3 = 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow |x^2 - 15x + 41| = 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 15x + 41 = \pm 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 15x + 41 = +3$ ou $x^2 - 15x + 41 = -3$

$\Leftrightarrow x^2 - 15x + 38 = 0$ ou $x^2 - 15x + 44 = 0$

$\Leftrightarrow \Delta = (15)^2 - 4 \cdot 38 = 73$ ou $(x-4)(x-11) = 0$

et $x_{1,2} = \dfrac{15 \pm \sqrt{73}}{2}$ et $x \in \{4 ; 11\}$

$\Leftrightarrow x \in \left\{ \dfrac{15-\sqrt{73}}{2} ; \dfrac{15+\sqrt{73}}{2} ; 4 ; 11 \right\}$

3) a) Soit $f(x) = (m-2)x^2 + 2(m-3)x + 5m-6$

1) Calculer m si $x=-3$ est racine de f :

$x=-3$ est racine de $f \Leftrightarrow f(-3)=0 \Leftrightarrow (m-2)(-3)^2+2(m-3)(-3)+5m-6=0$

$\Leftrightarrow 9m - \cancel{18} - 6m + \cancel{18} + 5m - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 8m - 6 = 0$

$\Leftrightarrow m = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

d'où $f(x) = \left(\frac{3}{4}-2\right)x^2 + 2\left(\frac{3}{4}-3\right)x + 5\cdot\frac{3}{4} - 6$

$= \frac{-5}{4}x^2 + \left(\frac{-18}{4}\right)x + \left(\frac{-9}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4}\right)(5x^2+18x+9)$

$= \left(-\frac{1}{4}\right)(x+3)(5x+3)$

donc l'autre racine est $x = \frac{-3}{5}$

<u>Mieux :</u> avec Viète : $P = \frac{c}{a} = \frac{5m-6}{m-2} = \frac{5\cdot\frac{3}{4}-6}{\frac{3}{4}-2} = \frac{\frac{-9}{4}}{\frac{-5}{4}} = \frac{9}{5} = x_1 \cdot x_2$

or $x_1 = -3$, d'où $x_2 = \frac{1}{x_1}\cdot\frac{9}{5} = \frac{-1}{3}\cdot\frac{9}{5} = \frac{-3}{5}$

---

3 a) 2) f n'admet pas de racines $\Leftrightarrow \Delta'_x < 0$

or $\Delta'_x = (m-3)^2 - (m-2)(5m-6)$

$= m^2 - 6m + 9 - (5m^2 - 16m + 12)$

$= -4m^2 + 10m - 3$

$= (-1)(4m^2 - 10m + 3)$ avec $\Delta'_m = (-5)^2 - 4\cdot 3 = 25 - 12 = 13$

d'où $4m^2 - 10m + 3 = 0$

$\Leftrightarrow m = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{4}$

m		$\frac{5-\sqrt{13}}{4}$		$\frac{5+\sqrt{13}}{4}$		$\mathbb{R}$
Δ'_m	$-$	0	$+$	0	$-$	

réponse : $\Delta'_x < 0 \Leftrightarrow m \in \left]-\infty, \frac{5-\sqrt{13}}{4}\right[\cup \left]\frac{5+\sqrt{13}}{4}, +\infty\right[$

---

b) $(m-1)x^2 - 2x + (3m-1) < 0$ et $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1) < 0 \\ \text{et} \\ \Delta' < 0 \end{cases}$

or $\Delta' = 1 - (m-1)(3m-1)$

$= \cancel{1} - 3m^2 + 4m - \cancel{1} = (-m)(3m-4)$

m		0		1	$\frac{4}{3}$		$\mathbb{R}$
Δ'	$-$	0	$+$		0	$-$	

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ \text{et} \\ m \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[\end{cases} \Leftrightarrow m \in \left]-\infty, 0\right[$