

Examen de mathématique - 3

(Algèbre – Récapitulation (sur deux périodes))

1) Résoudre les équations $f(x) = 0$ suivantes si :

a) $f(x) = x^4 - 7x^2 + 12$

b) $f(x) = 6x^2 - 13x + 6$

c) $f(x) = 7x^2 - 18x + 11$

d) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

e) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 5x + 2$

f) $f(x) = x^6 + 7x^3 - 8$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $8x^3 + 48x^2 + 96x + 64 = 0$

b) $\frac{2x-1}{52} - \left(x - \frac{1-x}{13} \right) = \frac{3}{2} - \frac{x+2}{4}$

c) $\frac{x-2}{x-3} + \frac{x-4}{x-2} \geq 3 - \frac{x}{x-3}$

d) $\sqrt{3}x^2 - 16\sqrt{3}x + 8\sqrt{12} \leq 0$

e) $|x^2 - 6x - 11| - 5 = 0$

f) $|3 - 4x| < 4x - 1$

g) $\sqrt{x^2 + x - 20} < 6$

3) Résoudre et discuter :

a) $m^2x + 4m = m^2 + 9x + 3$

b) $\frac{2x}{m-2} + x < \frac{m-2}{2}$

4) Rationnaliser les dénominateurs des fractions suivantes :

a) $\frac{5}{-1 - \sqrt{11}}$

b) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{7}}$

5) Déterminer la valeur du paramètre réel m pour que l'équation

$$mx^2 + (m^2 - 2)x - 2m = 0$$

admette l'une des racines égale à 2, puis calculer l'autre.

Examen de mathématique - 3

(Algèbre – Récapitulation (deux périodes))

1) Résoudre les équations $f(x) = 0$ suivantes si :

a) $f(x) = x^4 - 7x^2 + 12$

$$\begin{aligned}
 x^4 - 7x^2 + 12 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x^2 = y \text{ et } y^2 - 7y + 12 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x^2 = y \text{ et } (y-3)(y-4) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x^2 = y = 3 \text{ ou } x^2 = y = 4 \\
 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \text{ ou } x^2 - 4 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0 \text{ ou} \\
 (x - 2)(x + 2) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x \in \{ \sqrt{3}; -\sqrt{3}; 2; -2 \}
 \end{aligned}$$

b) $f(x) = 6x^2 - 13x + 6$

$$\begin{aligned}
 6x^2 - 13x + 6 &= 0 & \begin{cases} m+n = -13 \\ m \cdot n = 6 \cdot 6 = 36 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \underbrace{6x^2 - 9x}_{3x(2x-3)} - \underbrace{4x + 6}_{-2(2x-3)} &= 0 & \Leftrightarrow \begin{cases} m = -9 \\ n = -4 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow 3x(2x-3) - 2(2x-3) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (2x-3)(3x-2) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{3}{2}; \frac{2}{3} \right\}
 \end{aligned}$$

c) $f(x) = 7x^2 - 18x + 11$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 7x^2 - 18x + 11 = 0 \\
 \Leftrightarrow 7x^2 - 7x - 11x + 11 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 7x(x-1) - 11(x-1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x-1)(7x-11) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x \in \left\{ 1; \frac{11}{7} \right\}
 \end{aligned}$$

d) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^3 + 2x^2) - (x + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2(x+2) - (x+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+2)(x-1)(x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x \in \{-2; 1; -1\} \end{aligned}$$

e) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 5x + 2$

$$\underbrace{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 5x + 2}_{f(x)} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } f(1) &= 1 + 4 + 6 + 5 + 2 \neq 0 \\ f(-1) &= 1 - 4 + 6 - 5 + 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x+1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x+2)(\underbrace{x^2 + x + 1}_{g(x)}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } g(-1) &= -1 + 3 - 3 + 2 \neq 0 \\ g(-2) &= -8 + 12 - 6 + 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{or } x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x + \frac{1}{4}) + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{3}{4}}_{> 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$\text{d'où } x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+2) \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-1; -2\}$$

f) $f(x) = x^6 + 7x^3 - 8$

On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6 + 7x^3 - 8 \\ &= (x^3 + 8)(x^3 - 1) \\ &= (x+2)(x^2-2x+4)(x-1)(x^2+x+1) \end{aligned}$$

posons $y = x^3$:

$$\begin{aligned} y^2 + 7y - 8 &= \\ (y+8)(y-1) \end{aligned}$$

D'où : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 1\}$

car $x^2 - 2x + 4 \neq 0$ car $\Delta' = (-2)^2 - 4 = -3 < 0$
 et $x^2 + x + 1 \neq 0$ car $\Delta = 1^2 - 4 = -3 < 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $8x^3 + 48x^2 + 96x + 64 = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= 8x^3 + 48x^2 + 96x + 64 = 0 \\ \Leftrightarrow 8(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) &= 0 \\ \Leftrightarrow 8(x+2)^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &\in \{-2\} \end{aligned}$$

b) $\frac{2x-1}{52} - \left(x - \frac{1-x}{13}\right) = \frac{3}{2} - \frac{x+2}{4}$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{2x-1}{52} - \left(x - \frac{1-x}{13}\right) &= \frac{3}{2} - \frac{x+2}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{2x-1}{52} - \left(\frac{13x-1+x}{13}\right) &= \frac{6-x-2}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{2x-1}{52} - \frac{14x-1}{13} &= \frac{-x+4}{4} \quad \swarrow \times 52 \\ \Leftrightarrow 2x-1 - 4(14x-1) &= 13(-x+4) \\ \Leftrightarrow 2x-1 - 56x+4 &= -13x+52 \\ \Leftrightarrow 2x-56x+13x &= 52-3 \\ \Leftrightarrow -41x &= 49 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-49}{41} \\ \Leftrightarrow x &\in \left\{-\frac{49}{41}\right\} \end{aligned}$$

$$c) \quad \frac{x-2}{x-3} + \frac{x-4}{x-2} \geq 3 - \frac{x}{x-3}$$

$$\frac{x-2}{x-3} + \frac{x-4}{x-2} \geq 3 - \frac{x}{x-3} \quad \text{et } x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x-3} + \frac{x-4}{x-2} - 3 + \frac{x}{x-3} \geq 0 \quad \text{et } \dots$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2 + (x-4)(x-3) - 3(x-3)(x-2) + x(x-2)}{(x-3)(x-2)} \geq 0 \quad \text{et } \dots$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 4 + x^2 - 7x + 12 - 3x^2 + 15x - 18 + x^2 - 2x}{(x-3)(x-2)} \geq 0 \quad \text{et } \dots$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-2}{(x-3)(x-2)} \geq 0 \quad \text{et } \dots$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{(x-3)(x-2)} \geq 0 \quad \text{et } \dots$$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$x-1$	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	0	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+
Q	-	0	+	-	+

$$\Leftrightarrow x \in [1; 2[\cup]3; +\infty[$$

d) $\sqrt{3}x^2 - 16\sqrt{3}x + 8\sqrt{12} \leq 0$

2) d) $\sqrt{3}x^2 - 16\sqrt{3}x + 8\sqrt{12} \leq 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 - 16\sqrt{3}x + 8 \cdot 2\sqrt{3} \leq 0 \quad) : \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 16 \leq 0$

$\Leftrightarrow \Delta' = (-8)^2 - 16 = 64 - 16 = 48$

et $x \in [8 - 4\sqrt{3}; 8 + 4\sqrt{3}]$

$$\begin{cases} m+n = -16 \\ m \cdot n = 16 \end{cases} ?$$

$$\frac{x^2 - 16x + 16}{x} \Bigg| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{x^2 - 16x + 16}{x} \Bigg| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} \rightarrow \mathbb{R}$$

ou $x = 8 \pm \sqrt{48}$
 $= 8 \pm 4\sqrt{3}$
 $= 4(2 \pm \sqrt{3})$

e) $|x^2 - 6x - 11| - 5 = 0$

2) e) $|x^2 - 6x - 11| - 5 = 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow |x^2 - 6x - 11| = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 11 = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-8)(x+2) = 0$$

$$\text{ou } x^2 - 6x - 11 = -5$$

$$\text{ou } x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$\text{ou } \Delta' = (-3)^2 + 6 = 15$$

$$\text{et } x = 3 \pm \sqrt{15}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{8; -2; 3 + \sqrt{15}; 3 - \sqrt{15}\}$$

f) $|3-4x| < 4x-1$

$$|3-4x| < 4x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{4} \text{ et } (+<-) x \in \emptyset \\ \text{ou} \\ x > \frac{1}{4} \text{ et } (+<+) (3-4x)^2 < (4x-1)^2 \\ \text{et } 16x^2 - 24x + 9 < 16x^2 - 8x + 1 \\ \text{et } -16x < -8 \\ \text{et } x > \frac{1}{2} \\ \text{et } x \in]\frac{1}{2}, +\infty[\cap]\frac{1}{4}, +\infty[\end{cases}$$

$\Rightarrow x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$

g) $\sqrt{x^2+x-20} < 6$

$$\sqrt{x^2+x-20} < 6 \text{ et } x \in]-\infty, -5] \cup [4, +\infty[$$

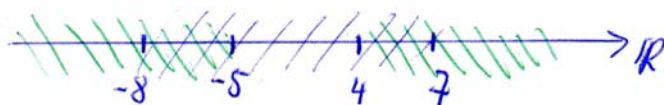
$$\Leftrightarrow x^2+x-20 < 36 \text{ et } \dots$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-56 < 0 \text{ et } \dots$$

$$\Leftrightarrow (x+8)(x-7) < 0 \text{ et } \dots$$

$$\Leftrightarrow x \in]-8; 7[\text{ et } \dots$$

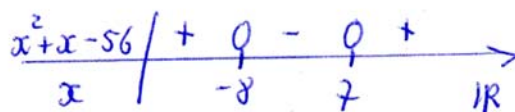
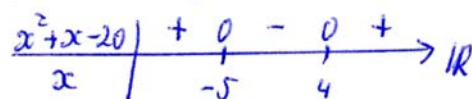
$$\Leftrightarrow x \in]-8; -5] \cup [4, 7[$$



$$x^2+x-20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+5)(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-5; 4\}$$



3) Résoudre et discuter :

a) $m^2x + 4m = m^2 + 9x + 3$

a3) $m^2x + 4m = m^2 + 9x + 3 \quad \text{et } x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow m^2x - 9x = m^2 - 4m + 3$

$\Rightarrow (m^2 - 9)x = (m - 3)(m - 1)$

$\Rightarrow (m - 3)(m + 3)x = (m - 3)(m - 1)$

$\Rightarrow \begin{cases} m = 3 \text{ et } 0x = 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ m = -3 \text{ et } 0x = 24 \text{ et } x \in \emptyset \\ \text{ou} \\ m \notin \{3, -3\} \text{ et } x = \frac{(m-3)(m-1)}{(m-3)(m+3)} \text{ et } x \in \left\{ \frac{m-1}{m+3} \right\} \end{cases}$

b) $\frac{2x}{m-2} + x < \frac{m-2}{2}$

$\frac{2x}{m-2} + x < \frac{m-2}{2} \quad \text{et } x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \begin{cases} m = 2 \text{ et } x \in \emptyset \\ \text{ou} \\ m \neq 2 \text{ et } \end{cases}$

$\frac{2x + x(m-2)}{m-2} < \frac{m-2}{2}$

$\text{et } \frac{(m-2)x}{m-2} < \frac{m-2}{2}$

$\text{et } \begin{cases} m = 0 \text{ et } 0x < -1 \text{ et } x \in \emptyset \\ \text{ou} \\ m \in]0, 2[\text{ et } x > \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-2}{m} \text{ et } x \in \left] \frac{(m-2)^2}{2m}, +\infty[\right. \\ \text{ou} \\ m \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[\text{ et } x \in \left] -\infty, \frac{(m-2)^2}{2m} \right[\end{cases}$

m	$-\infty$	0	2	$+\infty$
m	-	0	+	+
m-2	-	-	0	+
Q	+	0	-	+

4) Rationnaliser les dénominateurs des fractions suivantes :

a) $\frac{5}{-1-\sqrt{11}}$ b) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{7}}$

a)
$$\frac{5}{-1-\sqrt{11}} = \frac{-5}{1+\sqrt{11}} \cdot \frac{1-\sqrt{11}}{1-\sqrt{11}} = \frac{-5(1-\sqrt{11})}{1-11} = \frac{-5(1-\sqrt{11})}{-10}$$

b)
$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{7}} &= \frac{\sqrt{12}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\sqrt{7}} \cdot \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{7}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{12}(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{7})}{(3+2\sqrt{6}+2-7)} \\ &= \frac{\sqrt{12}(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{7})}{2(\sqrt{6}-2)} = \frac{\sqrt{12}(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{7})}{2(\sqrt{6}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{6}+1)}{(\sqrt{6}+1)} = \frac{\sqrt{12}(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{6}+1)}{2 \cdot 5} \\ &= \frac{\sqrt{12}(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{6}+1)}{10} \\ &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{6}+1)}{10} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{6}+1)}{5} \end{aligned}$$

5) Déterminer la valeur du paramètre réel m pour que l'équation

$$mx^2 + (m^2 - 2)x - 2m = 0$$

admette l'une des racines égale à 2, puis calculer l'autre.

* Soit $mx^2 + (m^2 - 2)x - 2m = 0$ admet une racine égale à 2

$$\Rightarrow m \cdot 4 + (m^2 - 2) \cdot 2 - 2m = 0$$

et $4m + 2m^2 - 4 - 2m = 0$

et $2m^2 + 2m - 4 = 0$

et $m^2 + m - 2 = 0$

et $(m + 2)(m - 1) = 0$ et $m \in \{-2; 1\}$

* Si $m = -2$ on a : $-2x^2 + 2x + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow x \in \{2; -1\}$$

* Si $m = 1$ on a : $x^2 - x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow x \in \{2; -1\}$

réponse : l'autre racine est donc -1 .