Examen de mathématique - 4

(Géométrie vectorielle plane)

1) Démontrer avec une argumentation claire et précise : (poser $\boxed{H}$ et $\boxed{T}$)

 a) $\forall\, \vec{u} \in \mathcal{V}_2\,,\ 0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$;

 b) $\forall\, \vec{u} \in \mathcal{V}_2\,,\ (-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$.

2) Compléter avec les **notions vectorielles vues au cours** les équivalences suivantes :

 a) M milieu du segment [A,B] $\Leftrightarrow$ … $\Leftrightarrow$ …

 b) $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow$ … $\Leftrightarrow$ …

 c) $t_{\vec{v}}(A) = A'$ $\Leftrightarrow$ … $\Leftrightarrow$ …

 d) $(C,D) \in \overrightarrow{EF}$ $\Leftrightarrow$ … $\Leftrightarrow$ …

 e) A, B et C alignés $\Leftrightarrow$ … $\Leftrightarrow$ …

 f) ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ … $\Leftrightarrow$ …

3) Soit le carré ABCD de centre O et le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DC}$ et le point N tel que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AO}$.
Démontrer que C est le milieu de [M,N] . (présenter une figure d'étude et poser $\boxed{H}$ et $\boxed{T}$)

4) a) Soit $\{A,B\} \subset \mathbb{P}$, décrire et expliquer la construction du point $M \in \mathbb{P}$ tel que $2\,\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$.
 (faire une figure d'étude)

 b) Simplifier $\vec{u} = 2\overrightarrow{DA} - 5\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} + 2\,(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})$
 en détaillant et justifiant avec le cours chaque étape de votre calcul.

5) Démontrer **avec le calcul vectoriel** et faire une figure d'étude :
Soit quatre points $\{A,B,C,D\} \subset \mathbb{P}$ et les points M , N , P et Q respectivement milieu des segments [A,B] , [B,C] , [C,D] et [D,A] .
Le quadrilatère MNPQ est alors un parallélogramme. (poser $\boxed{H}$ et $\boxed{T}$)

1) a) (H) $\vec{u} \in V_2$ (T) $0\cdot\vec{u} = \vec{0}$

(D) $\vec{u} + 0\cdot\vec{u} \underset{\text{Thm 9-1}}{=} 1\cdot\vec{u} + 0\cdot\vec{u} \underset{\text{Thm 9-3}}{=} (1+0)\cdot\vec{u} \underset{\text{ds } \mathbb{R}}{=} 1\cdot\vec{u} \overset{\text{Thm 9-1}}{=} \vec{u}$

$\Longrightarrow 0\cdot\vec{u} = \vec{0}$ (Thm 7-3)

cqfd

b) (H) $\vec{u} \in V_2$ (T) $(-1)\cdot\vec{u} = -\vec{u}$

(D)

$\vec{u} + (-1)\cdot\vec{u} \underset{\text{Thm 9-1}}{=} 1\cdot\vec{u} + (-1)\cdot\vec{u} \underset{\text{Thm 9-3}}{=} (1+(-1))\cdot\vec{u}$

$\underset{\text{ds } \mathbb{R}}{=} 0\cdot\vec{u} \underset{(a)}{=} \vec{0} \Longrightarrow (-1)\cdot\vec{u} = -\vec{u}$ (Thm 7-4)

cqfd

2) a) M milieu de $[A,B] \Leftrightarrow \vec{AM} = \vec{MB} \Leftrightarrow \vec{AB} = 2\,\vec{AM}$

$\Leftrightarrow \vec{AM} = \frac{1}{2}\cdot\vec{AB}$

b) $\vec{v} = \vec{AB} \Leftrightarrow (A,B) \in \vec{v} \Leftrightarrow B = t_{\vec{v}}(A)$

c) $t_{\vec{v}}(A) = A' \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{AA'} \Leftrightarrow (A,A') \in \vec{v}$

d) $(C,D) \in \vec{EF} \Leftrightarrow \vec{CD} = \vec{EF} \Leftrightarrow (C,D) \sim (E,F)$

$\Leftrightarrow$ CDFE parallél. $\Leftrightarrow (E,F) \in \vec{CD}$

e) A, B et C alignés $\Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{AB} = \alpha\cdot\vec{AC}$

$\Leftrightarrow \exists\, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{BC} = \beta\cdot\vec{AB}$

f) ABCD parallélogr. $\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow \vec{AD} = \vec{BC}$

3) (H) ABCD carré de centre O et $\{M, N\} \subset \mathbb{P}$

$\vec{AM} = \vec{OC} + \vec{DC}$ et $\vec{AN} = \vec{BC} + \vec{AO}$

(T) C milieu de $[M,N]$

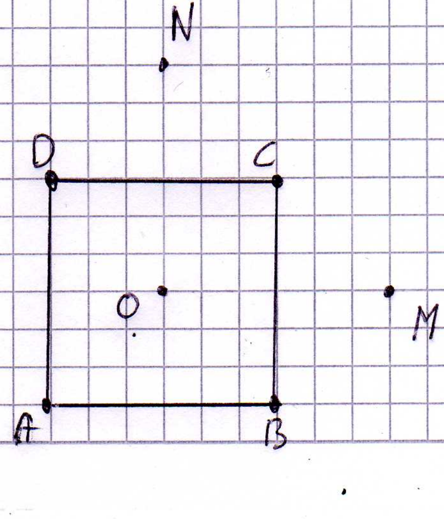
(D) On a: $\vec{AM} = \vec{OC} + \vec{DC}$ (H)

$= \vec{AO} + \vec{AB}$

$\Leftrightarrow M = t_{\vec{AO}}(B)$

et $\vec{AN} = \vec{BC} + \vec{AO} \overset{(H)}{=} \vec{AD} + \vec{AO}$

$\Leftrightarrow N = t_{\vec{OC}}(D)$



d'où $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$ par Chasles

$= (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AO})$ par (H)

$= (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC})$ EV

$\overset{(H)}{=} \vec{0} + \overrightarrow{BD}$ EV

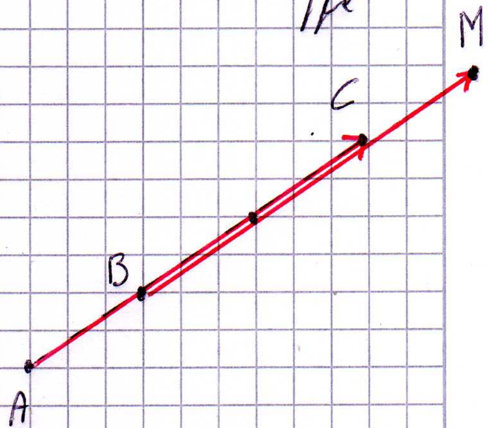
$= \overrightarrow{BD}$

$= 2\overrightarrow{BO}$ par (H) (O milieu de [B,D])

or $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{MC}$ car $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BM}$ (H) et $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ (H) $\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OC}$

donc $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BO} = 2\overrightarrow{MC} \Rightarrow$ C milieu de [M,N]

cqfd



4) a) $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$

$\iff 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$

$\iff 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM}) + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$

$\iff 2\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$

$\iff \overrightarrow{BM} = 3\cdot\overrightarrow{AB}$

$\iff \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$ et $C \in]A,B)$

$\iff M = t_{\overrightarrow{AC}}(B)$ et $AC = 3AB$.

b) $\vec{u} = 2\overrightarrow{DA} - 5\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})$

$= 2\overrightarrow{DA} + 5\overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB}$

$= (2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AB}) + (3\overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{DC}) + (2\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{CB})$

$= 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CD}$

$= (2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{CD}) + 3\overrightarrow{BC}$

$= 2\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}$

$= 2(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{BC}$

$= 2\cdot\vec{0} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}$

Exercice 5

(H) $\{A, B, C, D\} \subset \mathcal{P}$
P milieu de $[A,B]$
Q milieu de $[B,C]$
R milieu de $[C,D]$
S milieu de $[D,A]$

(T) PQRS est un parallélogramme

(D) PQRS parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$

Soit $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AS}$ (Charles)

$\overset{(H)}{=} \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ Thm 9

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$ Charles

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

de plus : $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CR}$ (Charles)

$\overset{(H)}{=} \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ Thm 9

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$ Charles

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

Ainsi $\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{QR}$ cqfd