

Interrogation de mathématique - 3

(Algèbre)

a) Résoudre les équations suivantes :

1) $3x^2 - 17x + 10 = 0$

4) $-12x + 9 = -4x^2$

2) $-3x^2 + 2x - 2 = 0$

5) $x^2 - 2x - 4 = 0$

3) $-4x^2 + 20x + 56 = 0$

6) $\frac{2x-1}{52} - \left(x - \frac{1+x}{4}\right) = \frac{7}{4} - \frac{x-2}{13}$

b) Résoudre les équations suivantes $f(x) = 0$ si :

1) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2} - \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

2) $f(x) = \frac{3x+1}{x+1} - \frac{2x}{x+2} + \frac{4}{x^2+3x+2}$

c) Résoudre et discuter les équations paramétriques suivantes :

1) $\frac{x+m}{m-1} - \frac{x-m}{m+1} = \frac{8-mx}{m^2-1}$

2) $\frac{x}{ab} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

a) ①

$$\begin{aligned}
 1) \quad & 3x^2 - 17x + 10 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 3x^2 - 15x - 2x + 10 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 3x(x-5) - 2(x-5) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x-5)(3x-2) = 0
 \end{aligned}$$

Corrigé

$$\begin{cases} m+n = -17 \\ m \cdot n = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -15 \\ n = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ 5; \frac{2}{3} \right\}$$

$$2) \quad -3x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \right) + \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(x - \frac{1}{3} \right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{5}{9}}_{> 0} = 0 \quad \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$\begin{cases} m+n = -2 \\ m \cdot n = 6 \end{cases} \quad ?$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & -4x^2 + 20x + 56 = 0 \Leftrightarrow \cancel{(-4)}(x^2 - 5x - 14) = 0 \Leftrightarrow (x-7)(x+2) = 0 \\
 \Leftrightarrow & x \in \{-2; 7\}
 \end{aligned}$$

$$4) \quad -12x + 9 = -4x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow (2x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

$$5) \quad x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - 4 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - \sqrt{5} = 0$$

$$\begin{cases} m+n = -2 \\ m \cdot n = -4 \end{cases} \quad ?$$

$$\Leftrightarrow (x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{1+\sqrt{5}; 1-\sqrt{5}\}$$

$$b2) f(x) = \frac{3x+1}{x+1} - \frac{2x}{x+2} + \frac{4}{x^2+3x+2} \text{ et } x \in \mathbb{R} - \{-1; -2\}$$

$$* f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(3x+1)(x+2) - 2x(x+1) + 4}{(x+1)(x+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 7x + 2 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \notin D_f \text{ ou } x = -3 \in D_f \Leftrightarrow x \in \{-3\}$$

$$b1) f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2} - \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)} - \frac{(x+1)^2(2x+1)}{(x+1)^3} \text{ et } x \in \mathbb{R} - \{1, 2, -1\}$$

$$= (x+2) - \frac{2x+1}{x+1}$$

$$* f(x) = (x+2) - \frac{2x+1}{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x+1) - (2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0 \text{ ou en cours!}$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

avec l'écrit :

$$* x^3 - x^2 - 4x + 4 =$$

$$x^2(x-1) - 4(x-1) =$$

$$(x-1)(x^2-4) =$$

$$(x-1)(x-2)(x+2)$$

$$* 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1 =$$

$$(x+1)(2x^2 + 3x + 1) =$$

$$(x+1)(2x+1)(x+1)$$

$$c1) \frac{x+m}{m-1} - \frac{x-m}{m+1} = \frac{8-mx}{m^2-1}$$

$$\Leftrightarrow m=1 \text{ ou } m=-1 \text{ et } x \in \emptyset$$

ou

$$m \notin \{1, -1\} \text{ et } x \in \mathbb{R} \text{ et } \frac{(m+1)(x+m) - (x-m)(m-1)}{(m-1)(m+1)} = \frac{8-mx}{m^2-1}$$

et

$$(m+1)(x+m) - (x-m)(m-1) = 8-mx$$

$$\text{et } mx + m^2 + x + m - mx + x + m^2 - m = 8 - mx$$

$$\text{et } 2m^2 + 2x = 8 - mx$$

$$\text{et } mx + 2x = 8 - 2m^2$$

$$\text{et } (m+2)x = 8 - 2m^2$$

et

$$\begin{cases} m = -2 \text{ et } 0 \cdot x = 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ m \neq -2 \text{ et } x = \frac{8 - 2m^2}{m+2} = \frac{2(4-m^2)}{m+2} \end{cases}$$

$$\text{et } x \in \left\{ \frac{2(4-m^2)}{m+2} \right\}$$

c2)

$$\frac{x}{ab} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=0 \text{ ou } b=0 \text{ et } x \in \emptyset \\ \text{ou} \\ 0 \notin \{a, b\} \text{ et } x \in \mathbb{R}^* \text{ et } \begin{array}{l} \frac{x^2+ab}{abx} = \frac{b+a}{ab} \\ \text{et } \frac{x^2+ab}{x} = b+a \quad \leftarrow \times(ab) \\ \text{et } x^2+ab = (b+a)x \\ \text{et } x^2 - (b+a)x + ab = 0 \\ \text{et } (x-a)(x-b) = 0 \\ \text{et } x \in \{a, b\} \end{array} \end{array} \right.$$