Interrogation de mathématique - 6

(Algèbre – Chap.1 : inéquations paramétriques et valeurs absolues)

1) Résoudre dans IR :

a) $x^2 - \frac{x}{x+2} \geqslant \frac{2x^2}{x+2}$

b) $|3 - 4x| < 4x + 1$

c) $|x + 1| - |x - 3| < 2$

d) $|x^2 - 4| = 3$

2) Résoudre dans IR et discuter les inéquations suivantes :

a) $\frac{x}{m} < \frac{x}{3} + 5$

b) $\frac{m+3}{m-3}x - \frac{m-3}{m+3}x \leqslant 2m$

1) a) $x^2 - \frac{x}{x+2} \geqslant \frac{2x^2}{x+2}$ et $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$

$\Leftrightarrow \frac{x^2(x+2) - x - 2x^2}{x+2} \geqslant 0$ et ...

$\Leftrightarrow \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2x^2}{x+2} \geqslant 0$ et ...

$\Leftrightarrow \frac{x(x^2-1)}{x+2} \geqslant 0$ et ...

$\Leftrightarrow (x^2-1) \cdot [x(x+2)] \geqslant 0$ et ...

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x(x+2)$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
P		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Leftrightarrow x \in]-\infty ; -2[$
$\cup [-1 ; 0] \cup [1 ; +\infty[$

b) $|3-4x| < 4x+1$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty ; \frac{3}{4}]$ et

$3-4x < 4x+1$

et $2 < 8x$

et $x > \frac{1}{4}$ et $x \in]\frac{1}{4} ; +\infty[\cap]-\infty ; \frac{3}{4}]$

et $x \in]\frac{1}{4} ; \frac{3}{4}]$

$3-4x$ / x	$+$	0	$-$	$\to \mathbb{R}$
		$\frac{3}{4}$		

ou $x \in]\frac{3}{4} ; +\infty[$ et $-(3-4x) < 4x+1$

et $4x - 3 < 4x + 1$

et $0 \cdot x < 4$ et $x \in]\frac{3}{4} ; +\infty[$

$\Leftrightarrow x \in]\frac{1}{4} ; \frac{3}{4}] \cup]\frac{3}{4} ; +\infty[$

$\Leftrightarrow x \in]\frac{1}{4} ; +\infty[$

c) $|x+1| - |x-3| < 2$ et $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$	$-$		0	$+$	$\|$	$+$	
$x-3$	$-$		$\|$	$-$	0	$+$	

$\Leftrightarrow$ $x \in]-\infty;-1]$ et $-(x+1)+(x-3)<2$

et $-x-1+x-3<2$

et $0 \cdot x < 6$

et $x \in]-\infty;-1]$

ou

$x \in]-1;3]$ et $(x+1)+(x-3)<2$

et $2x < 4$

et $x < 2$

et $x \in]-\infty;2[\cap]-1;3]$

et $x \in]-1;2[$

ou

$x \in]3;+\infty[$ et $(x+1)-(x-3)<2$

et $0 \cdot x < -2$

et $x \in \emptyset$

$\Leftrightarrow$ $x \in]-\infty;-1] \cup]-1;2[\cup \emptyset$

$\Leftrightarrow$ $x \in]-\infty;2[$

1 c) $|x+1| - |x-3| < 2$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ $\underbrace{|x+1|}_{\geq 0} < \underbrace{|x-3|+2}_{>0}$ $\Big)^2$

Si $a>0$ et $b>0$ alors $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$

$\Leftrightarrow$ $x^2+2x+1 < x^2-6x+9+4+4|x-3|$

$\Leftrightarrow$ $8x-12 < 4|x-3|$ $\Big) : 4$

$\Leftrightarrow$ $2x-3 < |x-3|$

$2x-3$	$-$	0	$+$	
x		$\frac{3}{2}$		$\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x \in]-\infty ; \frac{3}{2}] \text{ et } \underbrace{2x-3}_{-} < \underbrace{|x-3|}_{+} \text{ (toujours vrai)} \\ \quad \text{et } x \in]-\infty ; \frac{3}{2}] \\ \text{ou} \\ x \in]\frac{3}{2} ; +\infty[\text{ et } \underbrace{2x-3}_{+} < \underbrace{|x-3|}_{+} \Big)^2 \\ \quad \text{et } 4x^2-12x+9 < x^2-6x+9 \\ \quad \text{et } 3x^2-6x<0 \Big) : 3 \\ \quad \text{et } x(x-2)<0 \end{cases}$

x^2-2x	$+$	0	$-$	0	$+$	
x		0	1	2		$\mathbb{R}$
			$\frac{3}{2}$			
			I			

et $x \in]\frac{3}{2} ; +\infty[\cap]0 ; 2[$

et $x \in]\frac{3}{2} ; 2[$

$\Leftrightarrow$ $x \in]-\infty ; \frac{3}{2}] \cup]\frac{3}{2} ; 2[$

$\Leftrightarrow$ $x \in]-\infty ; 2[$

1) d) $|x^2-4| = 3$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad x^2-4 = \pm 3$

$\Leftrightarrow \quad x^2-4 = +3 \quad$ ou $\quad x^2-4 = -3$

$\Leftrightarrow \quad x^2-7 = 0 \quad$ ou $\quad x^2-1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) = 0 \quad$ ou $\quad x \in \{-1;1\}$

$\Leftrightarrow \quad x \in \{-\sqrt{7}; +\sqrt{7}; -1; 1\}$

2) a) $\frac{x}{m} < \frac{x}{3} + 5$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} m = 0 & \text{et} \quad x \in \emptyset \\ \text{ou} & \\ m \neq 0 & \text{et} \quad \frac{x}{m} - \frac{x}{3} < 5 \quad \text{et } x \in \mathbb{R} \end{cases}$

et $\frac{3x - mx}{3m} < 5$) $\times 3$

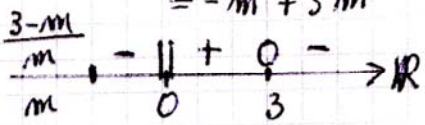
et $\frac{3-m}{m} \cdot x < 15$

Variante :

signe de $\frac{3-m}{m}$

est le signe de $(3-m) \cdot m$

$= -m^2 + 3m$



et $m = 3$ et $0 \cdot x < 15$ et $x \in \mathbb{R}$

ou

$m \in]0;3[$ et $x < \frac{15m}{3-m}$

et $x \in]-\infty; \frac{15m}{3-m}[$

ou

$m \in]-\infty; 0[\cup]3; +\infty[$ et

$x \in]\frac{15m}{3-m}; +\infty[$

2c) $\dfrac{m+3}{m-3}\cdot x - \dfrac{m-3}{m+3}\cdot x \leqslant 2m$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} m = 3 \text{ ou } m = -3 \text{ et } x \in \emptyset \\ \text{ou} \\ m \notin \{3;-3\} \text{ et } x \in \mathbb{R} \end{cases}$

et $\dfrac{(m+3)^2 \cdot x - (m-3)^2 \cdot x}{m^2-9} \leqslant 2m$

et $\dfrac{(m^2+6m+9-m^2+6m-9)\,x}{m^2-9} \leqslant 2m$

et $\dfrac{12m}{m^2-9}\cdot x \leqslant 2m$ $\Big) : 12$

$\dfrac{m}{m^2-9}\cdot x \leqslant \dfrac{m}{6}$

et $m = 0$ et $0 \cdot x \leqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$

ou

$m \in]-\infty;-3[\cup]0;3[$

et $x \geqslant \dfrac{m}{6}\cdot\dfrac{m^2-9}{m}$

et $x \in \left[\dfrac{m^2-9}{6};+\infty\right[$

Tableau des signes :

m	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
m	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$		
m^2-9	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$		
$\dfrac{m}{m^2-9}$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$		

ou

$m \in]-3;0[\cup]3;+\infty[$ et $x \leqslant \dfrac{m^2-9}{6}$ et $x \in \left]-\infty;\dfrac{m^2-9}{6}\right]$