Interrogation de mathématique – 8

(Chapitre 3 – Thalès- théorie)

1) a) Qu'est-ce qu'une graduation et comment la décrit-on ? (définitions 1 et 2)
   b) Enoncer avec précision les axiomes 1 et 2.

2) Présenter les hypothèses et la thèse du théorème de Thalès (direct), faire une figure illustrative, puis le démontrer.

3) Présenter les hypothèses et la thèse du théorème du 3$^{\text{ème}}$ côté et faire une figure illustrative (sans le démontrer)

4) Présenter les hypothèses et la thèse du théorème réciproque de Thalès, faire une figure illustrative, puis le démontrer.

1a)

Définition 1 On appelle **graduation** d'une droite d toute bijection de d sur $\mathbb{R}$ qui respecte l'ordre des points et des nombres.

Définition 2 Si g est une graduation de d avec $g(O) = 0$, $g(I) = 1$ et $g(C) = x$, alors
O s'appelle **point origine** de la graduation et I le **point unité**,
le couple (O, I) est le **repère** de la graduation,
le nombre x est **l'abscisse** du point C dans la graduation g,
le nombre $g(B) - g(A) = \overline{AB}_g$ s'appelle **mesure algébrique** du **bipoint** (A,B) dans la graduation g.

1b)

AXIOME DU CHANGEMENT DE GRADUATION

Si g_1 ou g_2 est une graduation de d associée à la distance, alors il existe deux réels α et β tels que, quel que soit $M \in d$, $g_2(M) = \alpha \cdot g_1(M) + \beta$.

AXIOME **Axiome de Thalès**

Si, lors d'une projection parallèle d'une droite sur une autre, les repères des graduations respectives se correspondent, alors tout point et son image ont la même abscisse.

2b)

THEOREME 2 Théorème de Thalès

Si g_1 et g_2 sont les graduations respectives de d_1 et d_2 et A', B', C', D', les images respectives de A, B, C, D par une projection parallèle de d_1 sur d_2, alors $\frac{\overline{AB}_{g_1}}{\overline{CD}_{g_1}} = \frac{\overline{A'B'}_{g_2}}{\overline{C'D'}_{g_2}}$ avec $C \neq D$ et $C' \neq D'$. Le rapport des mesures algébriques est conservé lors d'une projection parallèle.

Le théorème de Thalès :

(H) g_1 graduation de d_1 et $\{A,B,C,D\} \subset d_1$

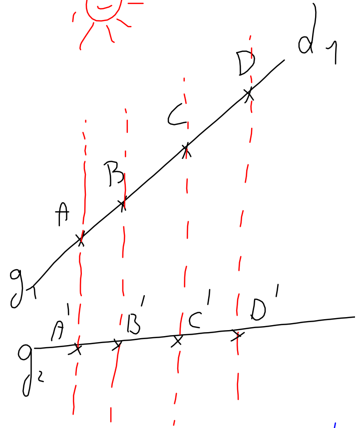
g_2 graduation de d_2 et $\{A',B',C',D'\} \subset d_2$

$A' = p_d(A)$ où $d \subset \mathbb{P}$ et $C \neq D$

$B' = p_d(B)$ et $D' = p_d(D)$ $C' \neq D'$

$C' = p_d(C)$

(T) $\underbrace{\frac{\overline{AB}_{g_1}}{\overline{CD}_{g_1}}}_{\text{sur } d_1} = \underbrace{\frac{\overline{A'B'}_{g_2}}{\overline{C'D'}_{g_2}}}_{\text{sur } d_2}$



(D) $\underbrace{\frac{\overline{AB}_{g_1}}{\overline{CD}_{g_1}} \overset{\text{thm ①}}{=} \frac{\overline{AB}_{g'_1}}{\overline{CD}_{g'_1}}}_{\text{sur } d_1}$ avec (A,B) repère de g'_1

$\overset{\text{déf ②}}{=} \frac{1}{g'_1(D) - \boxed{g'_1(C)}}$ || axiome de Thalès : $g'_1(D) = g'_2(D')$, $\boxed{g'_1(C) = g'_2(C')}$

$\frac{1}{g'_2(D') - \boxed{g'_2(C')}} \overset{\text{déf ②}}{=} \underbrace{\frac{\overline{A'B'}_{g'_2}}{\overline{C'D'}_{g'_2}} \overset{\text{thm ①}}{=} \frac{\overline{A'B'}_{g_2}}{\overline{C'D'}_{g_2}}}_{\text{sur } d_2}$

avec (A',B') repère de g'_2

cqfd

* Le théorème du $3^{ème}$ côté :

<u>préliminaires</u> : en géom. euclidienne, on n'a pas de graduation ; mais on a l'axiome de la distance.

Pour que Thalès "fonctionne" en géom. euclidienne il faut que les graduations "correspondent" à la distance (cf explication cabri et exercice 7 page 2)

$$\left(\left| \overline{AB}_g \right| = \delta(A,B) \right)$$

si g correspond à la distance

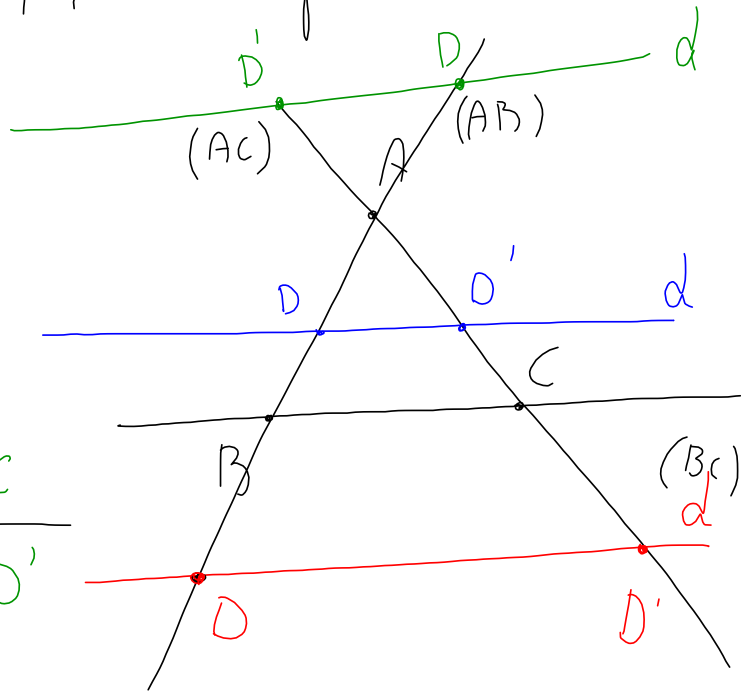
* Le théorème du 3ème côté :

(H) $A \notin (BC)$ (A, B, C non alignés)

$d \parallel (BC)$

$d \cap (AB) = \{D\}$

$d \cap (AC) = \{D'\}$



(T) $$\frac{AB}{AD} \overset{(1)}{=} \frac{AC}{AD'} \overset{(2)}{=} \frac{BC}{DD'}$$

D 1) découle de Thalès :

par H $(BC) // (DD') \Longrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD'}}$

algèbre $\Longrightarrow \left| \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \right| = \left| \frac{\overline{AC}}{\overline{AD'}} \right| \overset{\text{thm}}{\underset{\text{alg.}}{\Longrightarrow}} \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AD}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AD'}|}$

$\overset{\text{ex. 7 page 2}}{\Longrightarrow} \frac{AB}{AD} \overset{1}{=} \frac{AC}{AD'}$

2) à montrer : $\frac{AC}{AD'} \overset{2}{=} \frac{BC}{DD'}$

Construire le point $E \in d \cap d'$ où $d' // (AB)$
et $d' \ni C$

Alors le quadrilatère BDEC est un parallélogramme

* car $(BD) // (CE)$ (par construction)

et

$(BC) // (DE)$ (par H)

donc $BD = CE$ et $BC = DE$.

de plus, par Thalès direct :

On a $(CE) \parallel (AD) \Longrightarrow \dfrac{D'C}{D'A} = \dfrac{D'E}{D'D}$

d'où, ici $C \in [A, D']$ (si non on construit un autre calcul)

on veut : $\dfrac{AC}{AD'} \overset{(2)}{=} \dfrac{BC}{DD'}$ et on a $\dfrac{D'C}{D'A} = \dfrac{D'E}{D'D}$

et $BD = CE$ et $BC = DE$

On a : $\dfrac{D'C}{D'A} = \dfrac{D'E}{D'D} \overset{\text{algèbre}}{\Longleftrightarrow} 1 - \dfrac{D'C}{D'A} = 1 - \dfrac{D'E}{D'D}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{D'A - D'C}{D'A} = \dfrac{D'D - D'E}{D'D} \underset{\text{de la distance}}{\overset{\text{axiome}}{\Longleftrightarrow}} \dfrac{AC}{D'A} = \dfrac{DE}{D'D}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{AC}{AD'} = \dfrac{BC}{DD'}$ (avec $BC = DE$)

cqfd

* Réciproque du théorème de Thalès : (théorème 3)

(H) $\{A, B, C\} \subset d_1$ et $A \neq B$

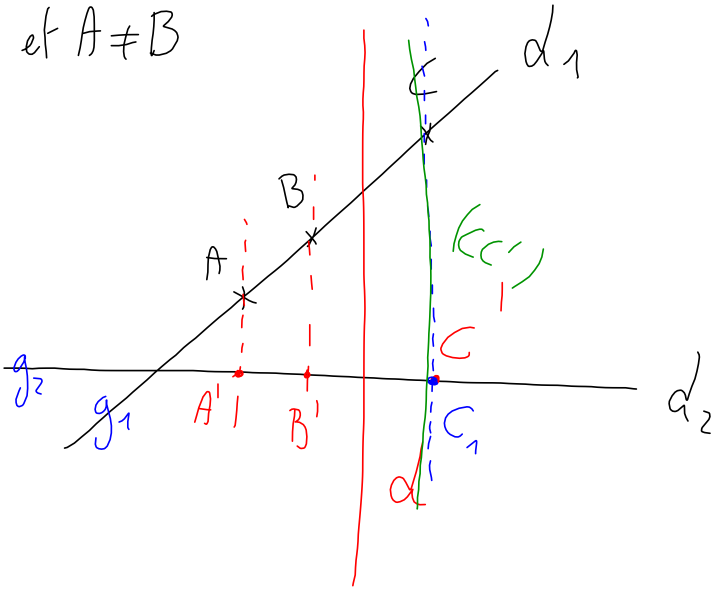
une droite $d \subset P$

$A' = p_d(A) \in d_2$

$B' = p_d(B) \in d_2$

$C' \in d_2$

et $\dfrac{\overline{AC}_{g_1}}{\overline{AB}_{g_1}} = \dfrac{\overline{A'C'}_{g_2}}{\overline{A'B'}_{g_2}}$



(T) $C' = p_d(C) \in d_2$

D Soit $C_1 = p_d(C) \in d_2$,

montrons que $C' = C_1$.

Soit par Thalès (direct) : $(A'A) // (B'B) // (CC_1)$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}}_{\text{dans } d_1} = \underbrace{\frac{\overline{A'C_1}}{\overline{A'B'}}}_{\text{dans } d_2}$$

or, par (H), $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$

donc $\dfrac{\overline{A'C'}}{\cancel{\overline{A'B'}}} = \dfrac{\overline{A'C_1}}{\cancel{\overline{A'B'}}} \overset{\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} \overline{A'C'} = \overline{A'C_1}$

$$\overset{\text{déf } 2}{\Longleftrightarrow} g_2(C') - \cancel{g_2(A')} = g_2(C_1) - \cancel{g_2(A')}$$

$$\overset{\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} g_2(C') = g_2(C_1)$$

$$\overset{\text{déf } 1}{\Longleftrightarrow} C' = C_1$$

(g_2 est bijective) cqfd

(remarque : et donc on a $(CC') // d$)