Interrogation de mathématique - 8

(Chapitre 3 – Thalès- théorie)

1) a) Qu'est-ce qu'une graduation et comment la décrit-on ? (définitions 1 et 2)
b) Compléter en langage symbolique avec les notions du cours :
1) Les trois points A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ ……
2) Le point M est milieu du segment [A,B] $\Leftrightarrow$ ……

2)

THEOREME 2 **Théorème de Thalès**

Si g_1 et g_2 sont les graduations respectives de d_1 et d_2 et A', B', C', D', les images respectives de A, B, C, D par une projection parallèle de d_1 sur d_2, alors $\dfrac{\overline{AB}_{g_1}}{\overline{CD}_{g_1}} = \dfrac{\overline{A'B'}_{g_2}}{\overline{C'D'}_{g_2}}$ avec $C \neq D$ et $C' \neq D'$. Le rapport des mesures algébriques est conservé

Poser $\boxed{H}$ et $\boxed{T}$ et faire une figure d'étude, puis démontrer.

3) Présenter les hypothèses et la thèse du théorème réciproque de Thalès (sans le démontrer).

4) Soit deux droites a et b avec $a \cap b = \{O\}$, $\{A,B,C\} \subset a - \{O\}$ et $\{A',B',C'\} \subset b - \{O\}$ tels que (AB') // (A'B) et (BC') // (B'C), alors (AC') // (A'C).
a) faire une figure d'étude.
b) poser $\boxed{H}$ et $\boxed{T}$ puis démontrer en suivant les étapes suivantes :
1) par $\boxed{H}$ avec les points A, B, A' et B' appliquer le théorème de Thalès ;
2) par $\boxed{H}$ avec les points B, C, B' et C' appliquer le théorème de Thalès ;
3) que peut-on déduire de 1) et 2) ?
4) conclure avec la réciproque de Thalès.

1a) **Définition 1** On appelle **graduation** d'une droite d toute bijection de d sur $\mathbb{R}$ qui respecte l'ordre des points et des nombres.

Définition 2 Si g est une graduation de d avec $g(O) = 0$, $g(I) = 1$ et $g(C) = x$, alors

O s'appelle **point origine** de la graduation et I le **point unité**,

le couple (O, I) est le **repère** de la graduation,

le nombre x est **l'abscisse** du point C dans la graduation g,

le nombre $g(B) - g(A) = \overline{AB}_g$ s'appelle **mesure algébrique** du **bipoint** (A,B) dans la graduation g.

1b) 1) Les trois points A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ *pour des points alignés (Chasles)*

2) M *milieu de* [A,B] *ou de* (A,B) $\Leftrightarrow \overline{AM} = \overline{MB} \Leftrightarrow g(M) = \dfrac{g(A) + g(B)}{2}$

2b)

THEOREME 2 Théorème de Thalès

Si g_1 et g_2 sont les graduations respectives de d_1 et d_2 et A', B', C', D', les images respectives de A, B, C, D par une projection parallèle de d_1 sur d_2, alors $\frac{\overline{AB}_{g_1}}{\overline{CD}_{g_1}} = \frac{\overline{A'B'}_{g_2}}{\overline{C'D'}_{g_2}}$ avec $C \neq D$ et $C' \neq D'$. Le rapport des mesures algébriques est conservé lors d'une projection parallèle.

Le théorème de Thalès :

(H) g_1 graduation de d_1 et $\{A, B, C, D\} \subset d_1$

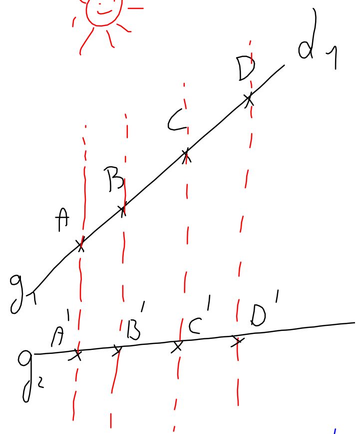
g_2 graduation de d_2 et $\{A', B', C', D'\} \subset d_2$

$A' = p_d(A)$ où $d \subset \mathbb{P}$ et $C \neq D$

$B' = p_d(B)$ et $D' = p_d(D)$ $C' \neq D'$

$C' = p_d(C)$

(T) $\underbrace{\frac{\overline{AB}_{g_1}}{\overline{CD}_{g_1}}}_{\text{sur } d_1} = \underbrace{\frac{\overline{A'B'}_{g_2}}{\overline{C'D'}_{g_2}}}_{\text{sur } d_2}$



(D) $\underbrace{\frac{\overline{AB}_{g_1}}{\overline{CD}_{g_1}} \overset{\text{thm 1}}{=} \frac{\overline{AB}_{g'_1}}{\overline{CD}_{g'_1}}}_{\text{sur } d_1}$ avec (A, B) repère de g'_1

$\overset{\text{def 2}}{=} \frac{1}{g'_1(D) - \boxed{g'_1(C)}}$ ‖ axiome de Thalès : $g'_1(D) = g'_2(D')$

$\boxed{g'_1(C) = g'_2(C')}$

$\frac{1}{g'_2(D') - \boxed{g'_2(C')}} \overset{\text{def 2}}{=} \underbrace{\frac{\overline{A'B'}_{g'_2}}{\overline{C'D'}_{g'_2}} \overset{\text{thm 1}}{=} \frac{\overline{A'B'}_{g_2}}{\overline{C'D'}_{g_2}}}_{\text{sur } d_2}$

avec (A', B') repère de g'_2

cqfd

3)

THEOREME 3 Réciproque du théorème de Thalès

Pour $A \neq B$ et $A' \neq B'$, si A' et B' sont les images des points A et B par une projection parallèle p_d de d_1 sur d_2, $C \in d_1$, $C' \in d_2$ et $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$ alors $C' = p_d(C)$.

H $\{A, B, C\} \subset d_1$ et $A \neq B$

une droite $d \subset \mathcal{P}$

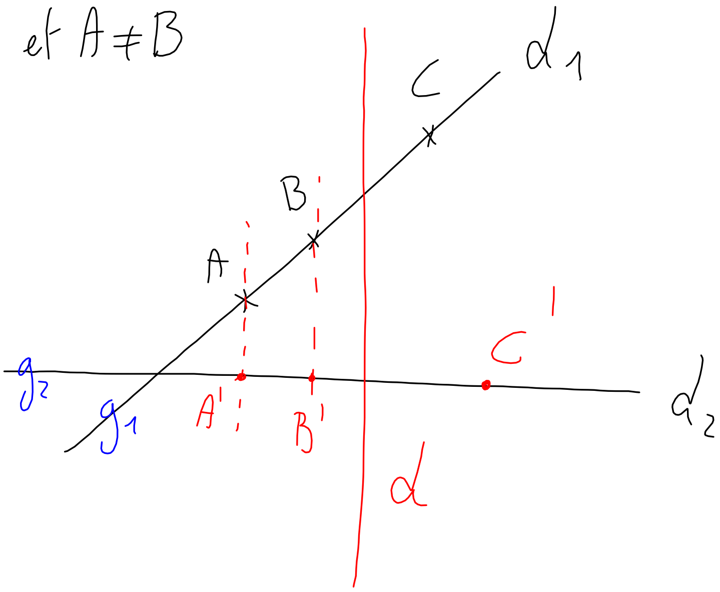
$A' = p_d(A) \in d_2$

$B' = p_d(B) \in d_2$

$C' \in d_2$

et $\frac{\overline{AC}_{g_1}}{\overline{AB}_{g_1}} = \frac{\overline{A'C'}_{g_2}}{\overline{A'B'}_{g_2}}$

T $C' = p_d(C) \in d_2$

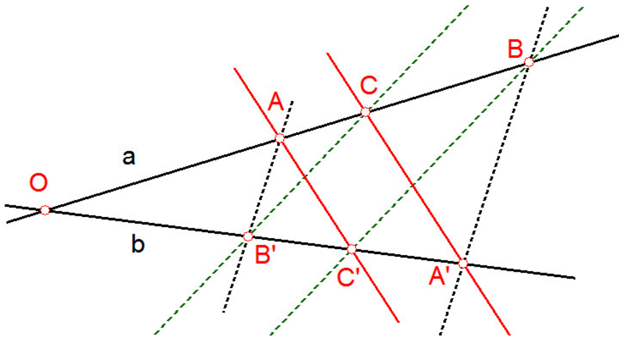


4) H $a \cap b = \{O\}$

$\{A, B, C\} \subset a - \{O\}$

$\{A', B', C'\} \subset b - \{O\}$

$(AB') \parallel (A'B)$ et $(BC') \parallel (B'C)$



T $(A'C) \parallel (AC')$

D par H : $(A'B) // (AB') \underset{\text{Thalès}}{\Longrightarrow} \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}$ ①

et $(B'C) // (BC') \Longrightarrow \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OB'}}$ ②

de ① on a : $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$ (algèbre)

② et $\overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OC} \cdot \overline{OC'}$ (algèbre)

$\xrightarrow{(alg)} \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OC} \cdot \overline{OC'}$

$\xrightarrow{(alg)} \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OA'}}$

avec la réciproque du théorème de Thalès

on a : $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OA'}}$ donc $(A'C) // (AC')$ cqfd