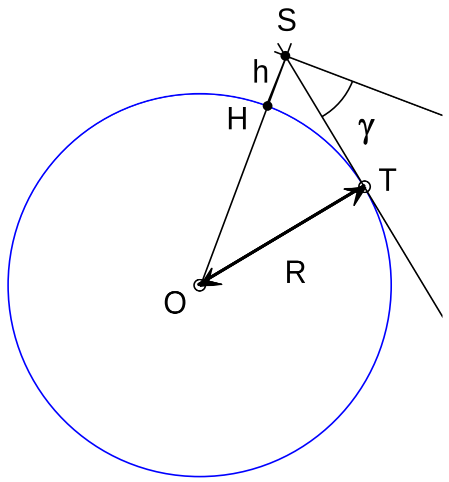
Exercices de trigonométrie - 2

(Trigonométrie du triangle rectangle et non rectangle)

1) On veut mesurer (sans altimètre) l'altitude d'une montagne, située en bord de mer, de sommet S par rapport au niveau de la mer. Une première observation du point S à partir d'un point A se fait sous un angle de 6,25° , une deuxième à partir d'un point B sous un angle de 5,96° .
Les points A, B et H (pied de la montagne) sont alignés et la distance AB = d = 1000 mètres.
   a) Poser les données de l'exercice et faire une figure d'étude ;
   b) Poser les équations adéquates pour calculer l'altitude du sommet S de cette montagne.
   c) Calculer littéralement l'altitude x = SH recherchée, puis en donner une valeur approchée à la calculatrice.

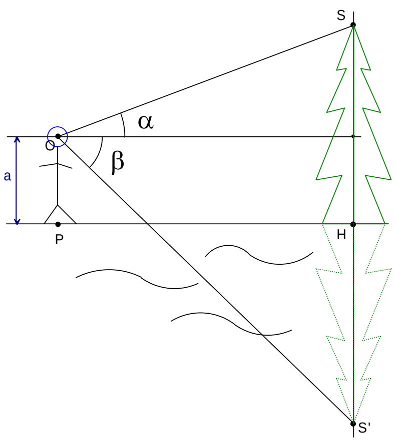
2) Calcul du rayon terrestre dans l'antiquité :

   Un observateur placé au sommet d'une montagne S en bord de mer, dont on connaît l'altitude h = 2290 mètres par rapport au niveau de la mer, regarde un point T à l'horizon marin sous un angle de dépression de mesure γ = 1,53°. A l'aide de ces mesures, calculer le rayon terrestre R en admettant que la terre est une boule de centre O et de rayon R.



3) Un pilote d'avion de tourisme conduit son appareil en ligne droite et à une altitude constante de a mètres et à vitesse constante. En un point A, il vise un point remarquable B au sol situé dans l'axe de sa route et en avant, et il mesure l'angle α (de dépression) que forme la droite (AB) avec le plan horizontal. Ayant dépassé la verticale de B et étant parvenu en A', le pilote mesure de nouveau l'angle α' que forme la droite (A'B) avec le plan horizontal.
On donne les angles α = 18,9° et α' = 9,72° et l'altitude de l'avion a = 1200 mètres.
   a) Poser les données de l'exercice et faire une figure d'étude ;
   b) Poser les équations adéquates pour calculer la distance x = AA' parcourue.
   c) Calculer littéralement la distance x recherchée, puis en donner une valeur approchée à la calculatrice.

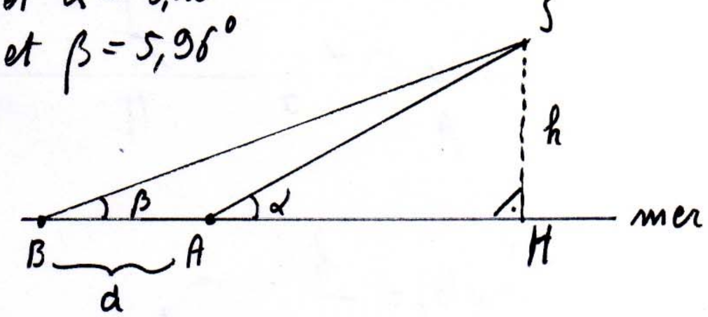
4) Un observateur debout au bord d'un canal rectiligne aperçoit le sommet S d'un arbre, planté au bord de la rive opposée en face de lui, sous un angle d'élévation de mesure α = 23,9°. Il voit l'image S' de ce sommet à la surface de l'eau sous un angle de dépression de β = 27,3°.
L'œil O de l'observateur étant à a = 1,80 mètres au dessus de la surface de l'eau, calculer la largeur x = PH du canal.



Exercices de trigonométrie

1) Données:
- $* \; S$: sommet de la montagne
- $* \; HS$: altitude de la montagne ; $HS = h$
- $* \; \measuredangle \alpha = \measuredangle MAS$ et $\alpha = 6{,}25°$
- $* \; \measuredangle \beta = \measuredangle MBS$ et $\beta = 5{,}96°$
- $* \; AB = d = 1000$ m

a)



b) Dans le triangle rectangle AHS, rectangle en H :

$$\tan(\alpha) = \frac{SH}{AH} = \frac{h}{x} \quad \text{où } x = AH \qquad (1)$$

Dans le triangle rectangle BHS :

$$\tan(\beta) = \frac{SH}{BH} = \frac{h}{x+d} \qquad (2)$$

de (1) : $x = \dfrac{h}{\tan(\alpha)}$

de (2) : $x + d = \dfrac{h}{\tan(\beta)} \Leftrightarrow x = \dfrac{h}{\tan(\beta)} - d$

d'où $\dfrac{h}{\tan(\alpha)} = \dfrac{h}{\tan(\beta)} - d \Leftrightarrow \dfrac{h}{\tan(\alpha)} - \dfrac{h}{\tan(\beta)} = -d$

$$\Leftrightarrow h\left(\tan(\beta) - \tan(\alpha)\right) = -d \cdot \tan(\alpha)\tan(\beta)$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{d \cdot \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}$$

applic. num.: $h = \dfrac{1000 \cdot \tan(6{,}25°) \cdot \tan(5{,}96°)}{\tan(6{,}25°) - \tan(5{,}96°)}$

et $h \simeq 2233{,}38$ mètres

exercice 2

Données : * altitude de la montagne : $h = SH = 2290$ m

* (ST) tangente à $\mathcal{C}(O, R)$

* $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle TSA$ et $A \in d$ et $d // t$, $t \ni H$ et t tangente à $\mathcal{C}$

et $\gamma = 1{,}53°$: angle de dépression de sommet S

* Calculer R

Résolution : On a : $(OS) \perp d$ et $(OT) \perp (ST)$ $\Rightarrow \sphericalangle \gamma = \sphericalangle TOS$

dans le triangle OST, rectangle en T :

$$\left(\tan(\gamma) = \frac{ST}{OT} \text{ et}\right) \cos(\gamma) = \frac{OT}{OS} = \frac{R}{R+h}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\gamma) R + \cos(\gamma) \cdot h = R$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(\gamma) \cdot h}{1 - \cos(\gamma)} = R$$

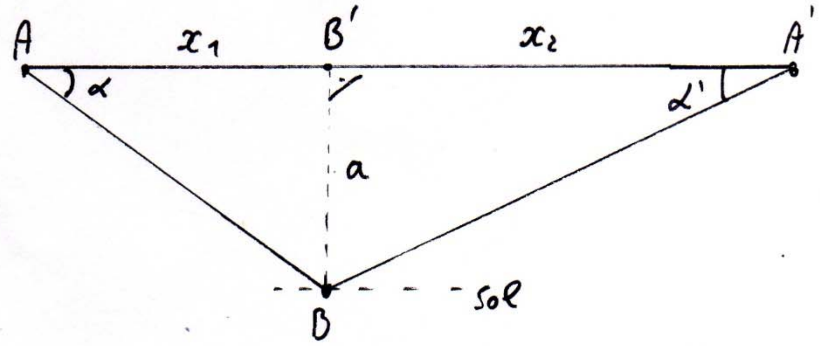
appl. num : $R = \dfrac{\cos(1{,}53°) \cdot 2290}{1 - \cos(1{,}53°)} \simeq 6420943$ m $\simeq 6'420$ km

(valeur "exacte" 6378 km)

exercice 3

* <u>Données</u> :

$$\left\{\begin{array}{l} * \ \sphericalangle B'AB = \sphericalangle \alpha \\ \quad \alpha = 18{,}9^\circ \\ * \ \sphericalangle B'A'B = \sphericalangle \alpha' \\ \quad \alpha' = 9{,}72^\circ \\ * \ BB' = a = 1200 \text{ m} \\ * \ \text{calculer } x = AA' \end{array}\right.$$



* <u>Résolution</u> :

Soit $x_1 = AB'$ et $x_2 = A'B'$ et $B' = p_\perp(B) \in (AA')$

On a $\tan(\alpha) = \dfrac{BB'}{AA'} = \dfrac{a}{x_1}$ et $\tan(\alpha') = \dfrac{BB'}{A'B'} = \dfrac{a}{x_2}$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{a}{\tan(\alpha)} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{a}{\tan(\alpha')}$$

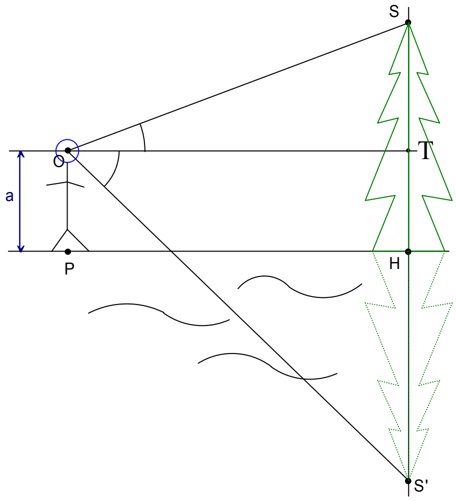
d'où $x = AA' = AB' + B'A'$ car $B' \in [A, A']$

$= x_1 + x_2$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{a}{\tan(\alpha)} + \frac{a}{\tan(\alpha')} \quad \Leftrightarrow \quad x = a \cdot \frac{\tan(\alpha') + \tan(\alpha)}{\tan(\alpha) \cdot \tan(\alpha')}$$

<u>appl. num</u> : $x = 1200 \cdot \dfrac{\tan(9{,}72^\circ) + \tan(18{,}9^\circ)}{\tan(9{,}72^\circ) \cdot \tan(18{,}9^\circ)}$

et $x \simeq 10'510{,}48$ m



4) <u>Données</u> : * angle d'élévation : $\alpha = 23{,}9°$

* angle de dépression : $\beta = 27{,}3°$ (cf figure)
* hauteur de l'observateur : $a = 1{,}8$ [m]
* largeur du canal : $x = PH$

<u>Résolution</u> On a $SH = S'H$ et $SH = ST + TH$
$= ST + a$ $\quad TH = OP = a$

ds le triangle ΔOTS, rect. en T : $\tan(\alpha) = \dfrac{ST}{OT} = \dfrac{ST}{x}$ $\quad \left(OT = PH = x\right)$

ds le triangle $\Delta OTS'$, rect. en T : $\tan(\beta) = \dfrac{S'T}{OT} = \dfrac{S'H + TH}{x}$

$= \dfrac{SH + a}{x} = \dfrac{ST + 2a}{x}$

$$\text{On a : } \begin{cases} \tan(\alpha) = \dfrac{ST}{x} \\[2ex] \tan(\beta) = \dfrac{ST + 2a}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ST = x \cdot \tan(\alpha) \\[2ex] \tan(\beta) = \dfrac{x \cdot \tan(\alpha) + 2a}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \tan(\beta) - x \tan(\alpha) = 2a \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2a}{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}$$

- a.n. : $x = \dfrac{2 \cdot 1{,}8}{\tan(27{,}3°) - \tan(23{,}9°)} \cong 49{,}31$ [m]