

4.74 On donne un cercle Γ et un point A . Après avoir vérifié que A appartient à Γ , trouver l'équation de la tangente à Γ au point A .

1) $\Gamma : (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$ $A(-2; 1)$

2) $\Gamma : x^2 + y^2 - 4x + 6y - 37 = 0$ $A(3; 4)$

3) $\Gamma : x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$ $A(2\sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2})$

4) $\Gamma : 3x^2 + 3y^2 - 7x + 12y - 28 = 0$ $A(5; -2)$

4.75 Trouver les équations des tangentes au cercle d'équation $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$ aux points d'intersection de ce cercle avec les axes de coordonnées.

4.76 On considère le cercle Γ centré à l'origine et passant par le point $M(3; 4)$. La tangente à Γ au point M coupe la droite (OI) en un point P . On trace la droite joignant le point P au point $B(0; 5)$, qui recoupe Γ en un point A .

Calculer l'aire du triangle OAB .

4.77 Calculer l'angle aigu formé par la droite d'équation $3x - y - 1 = 0$ et le cercle d'équation $(x-2)^2 + y^2 = 5$ (c'est-à-dire l'angle aigu que forme cette droite avec la tangente en l'un de ses points d'intersection avec le cercle).

4.78 Calculer l'angle sous lequel se coupent les cercles d'équations $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 8$ et $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 6 = 0$ (c'est-à-dire l'angle aigu que forment leurs tangentes en l'un de leurs points d'intersection).

4.79 Déterminer les équations des tangentes de pente m au cercle Γ .

1) $\Gamma : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$ $m = -\frac{3}{4}$

2) $\Gamma : x^2 + y^2 - 12x + 2y - 8 = 0$ $m = \frac{1}{2}$

4.80 Déterminer les équations des tangentes au cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 4 = 0$ perpendiculaires à la droite d'équation $2x + 3y - 6 = 0$.

4.81 Déterminer les équations des tangentes au cercle Γ issues du point P .

- 1) $\Gamma : x^2 + y^2 = 25$ $P(7; 1)$
- 2) $\Gamma : (x + 1)^2 + y^2 = 20$ $P(1; 6)$
- 3) $\Gamma : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ $P(10; 3)$
- 4) $\Gamma : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 31 = 0$ $P(-1; 5)$
- 5) $\Gamma : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ $P(3; 2)$

4.82 Trouver les équations des tangentes communes aux cercles Γ_1 et Γ_2 .

- 1) $\Gamma_1 : x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$
 $\Gamma_2 : x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$
- 2) $\Gamma_1 : x^2 + y^2 - 25 = 0$
 $\Gamma_2 : x^2 + y^2 - 24y + 143 = 0$

4.83 Montrer que la longueur du segment de tangente menée du point $P(x_0; y_0)$ au cercle d'équation $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ est donnée par :

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 + c}.$$

4.84 1) Montrer que les cercles Γ et Γ' d'équations

$$\Gamma : x^2 + y^2 = 49$$

$$\Gamma' : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$$

sont tangents en un point A dont on déterminera les coordonnées.

- 2) Trouver l'équation du cercle Ω tangent à Γ et à Γ' au point A et passant par l'origine O .
- 3) Montrer que les tangentes au cercle Ω aux trois points d'intersection de Ω avec les axes de coordonnées et au point A forment un losange.

4.85 On donne le point $C(0; 9)$ et le cercle Γ d'équation

$$\Gamma : (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$$

- 1) Construire le triangle ABC isocèle de sommet A , sachant que Γ en est le cercle inscrit et que l'abscisse de A est positive.
- 2) Calculer les coordonnées des sommets A et B et des points de contact A' , B' et C' du cercle Γ avec les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement.

4.86 On donne les sommets $A(-15; -5)$ et $B(1; 7)$ d'un triangle ABC .

- 1) Déterminer les coordonnées du sommet C de ce triangle, sachant que le centre du cercle inscrit dans le triangle est l'origine O du repère.
- 2) Calculer l'aire du triangle ABC .
- 3) Montrer que ce triangle est rectangle.

4.87 On donne un cercle Γ , d'équation $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 159 = 0$, un point $A(-1; \frac{184}{5})$ et une pente $m = \frac{5}{12}$.

- 1) Déterminer les coordonnées des points B et C , sachant que Γ est le cercle inscrit dans le triangle ABC , que m est la pente de la droite (BC) et que l'abscisse de B est négative.
- 2) Déterminer les coordonnées des points de contact A' , B' et C' du cercle Γ avec les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement.

4.88 Soit le triangle de sommets $A(7; 3)$, $B(1; -1)$ et $C(9; 0)$, Γ le cercle de diamètre $[AC]$ et T le point où la droite (BC) recoupe Γ .

La tangente t à Γ en T coupe le côté $[AB]$ en M . Montrer que M est le milieu de $[AB]$. Calculer l'aire du quadrilatère $AMTC$.

4.89 Soit Γ le cercle de centre $S(2; 3)$ et de rayon 5 et t sa tangente au point $A(6; 6)$. La tangente t coupe la droite d d'équation $x - y = 24$ en un point B . La droite (BS) coupe Γ en deux points C et D (l'abscisse de D étant inférieure à celle de C). La tangente t' à Γ en D coupe la droite t en un point E . Calculer l'aire du quadrilatère $ACDE$.

4.90 On considère les points $A(0; 5)$, $B(6; -3)$ et $C(7; 4)$.

- 1) Montrer que le triangle ABC est rectangle et déterminer l'équation du cercle Γ_1 circonscrit à ce triangle.
- 2) Déterminer l'équation du cercle Γ_2 , de rayon $\frac{5}{2}$, qui coupe Γ_1 en A et dont le centre E , d'abscisse strictement positive, est situé sur la droite d'équation $4x - 2y + 5 = 0$.
- 3) Trouver les équations des tangentes t_1 et t_2 en A à Γ_1 et Γ_2 respectivement et montrer que ces tangentes sont perpendiculaires.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

Définition

Un **lieu géométrique** du plan π est un ensemble de points de π possédant une même propriété.

- 4.91** Soit $A(a; 0)$ et $B(0; b)$ deux points tels que $a + b = 8$, avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$. Quel est le lieu géométrique des milieux de $[AB]$?
- 4.92** On donne les deux points $A(3; 2)$ et $B(1; 4)$. Trouver le lieu géométrique des points C tels que l'aire du triangle ABC soit égale à 8.
- 4.93** Déterminer le lieu géométrique du milieu d'un segment de longueur 2 dont les extrémités se déplacent respectivement sur chacun des axes $(O; I)$ et $(O; J)$.
- 4.94** On considère le cercle Γ de diamètre $[AB]$, où $A(2; 0)$ et $B(-2; 0)$.
Soit P un point du cercle Γ . La droite (AP) coupe la droite passant par B et parallèle à (OP) en S .
Trouver le lieu géométrique du point S lorsque P parcourt le cercle Γ .