4.48 Montrer que les cercles d'équations $\mathcal{C}_1\, x^2 + y^2 - 16x - 20y + 115 = 0$ et $\mathcal{C}_2\, x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$ sont tangents. Trouver le point de tangence, ainsi que ~~l'~~ une équation de la tangente commune en ce point.

Résolution : 1) $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A\}$

on résoud : $\begin{cases} x^2+y^2-16x-20y+115=0 & (1) \\ \text{(et)} & \\ x^2+y^2+8x-10y+5=0 & (2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-16x-20y+115=0 & (1) \\ -24x-10y+110=0 \quad ? & (1)-(2) \\ 12x+5y-55=0 & \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \quad - \; - \; - \\ y = \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2+y^2-16x-20y+115=0 & (1) \\ 12x+5y-55=0 & (1)-(2)=(3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{55-12x}{5} \quad \text{de } (3) \\ (x-8)^2+(y-10)^2 = -115+64+100 = 49 = 7^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{55-12x}{5} = 11 - \dfrac{12}{5}x \\ (x-8)^2 + \left(11 - \dfrac{12}{5}x - 10\right)^2 = 49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{20}{13} \\ y = 11 - \dfrac{12}{\cancel{5}} \cdot \dfrac{\cancel{20}^{4}}{13} = 11 - \dfrac{48}{13} = \dfrac{95}{13} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x;y) \in \left\{\left(\frac{20}{13};\frac{95}{13}\right)\right\}$$

donc $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \left\{A\left(\frac{20}{13};\frac{95}{13}\right)\right\}$

coin brou :

$$(x-8)^2 + \left(1 - \frac{12}{5}x\right)^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 64 + 1 - \frac{24}{5}x + \frac{144}{25}x^2 = 49 \quad \big) \times 25$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 - 400x + 64\cdot 25 + 25 - 120x + 144x^2 = 49\cdot 25$$

$$\Leftrightarrow 169x^2 - 520x + 16\cdot 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow (13x-20)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{20}{13}$$

* équation de la tangente t en A commune à $\mathcal{C}_1$ et à $\mathcal{C}_2$:

On a : $t \ni A$ et $t \perp (C_1C_2)$ où $C_1(8;10)$ centre de $\mathcal{C}_1$
$C_2(-4;5)$ centre de $\mathcal{C}_2$

d'où $M(x;y) \in t \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{C_1C_2}$

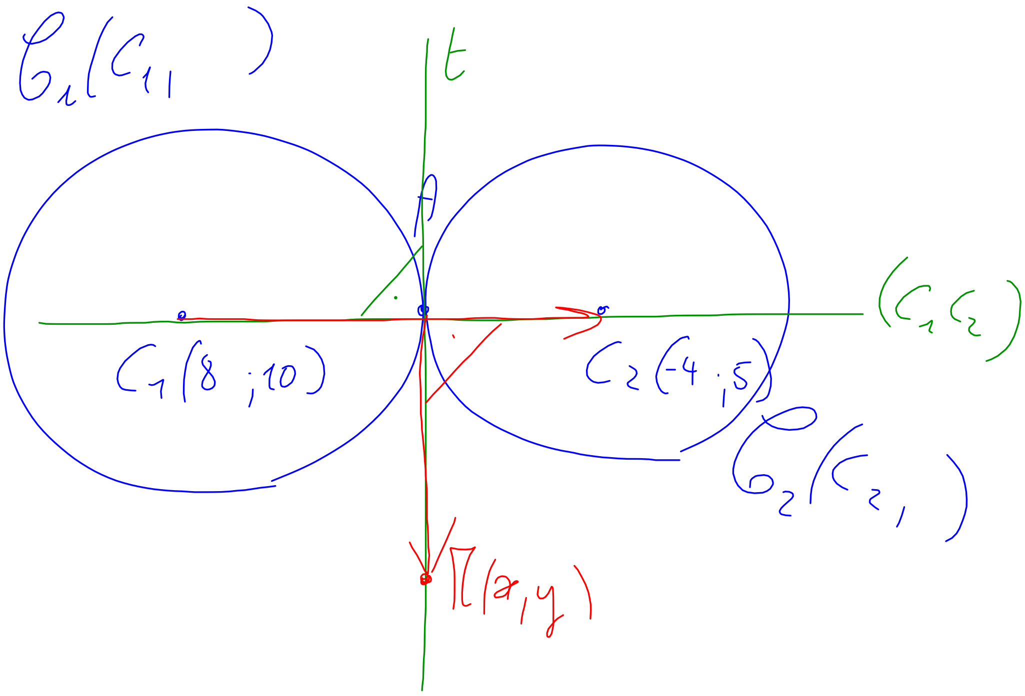
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - \frac{20}{13} \\ y - \frac{95}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-12)\left(x - \frac{20}{13}\right) + (-5)\cdot\left(y - \frac{95}{13}\right) = 0$$

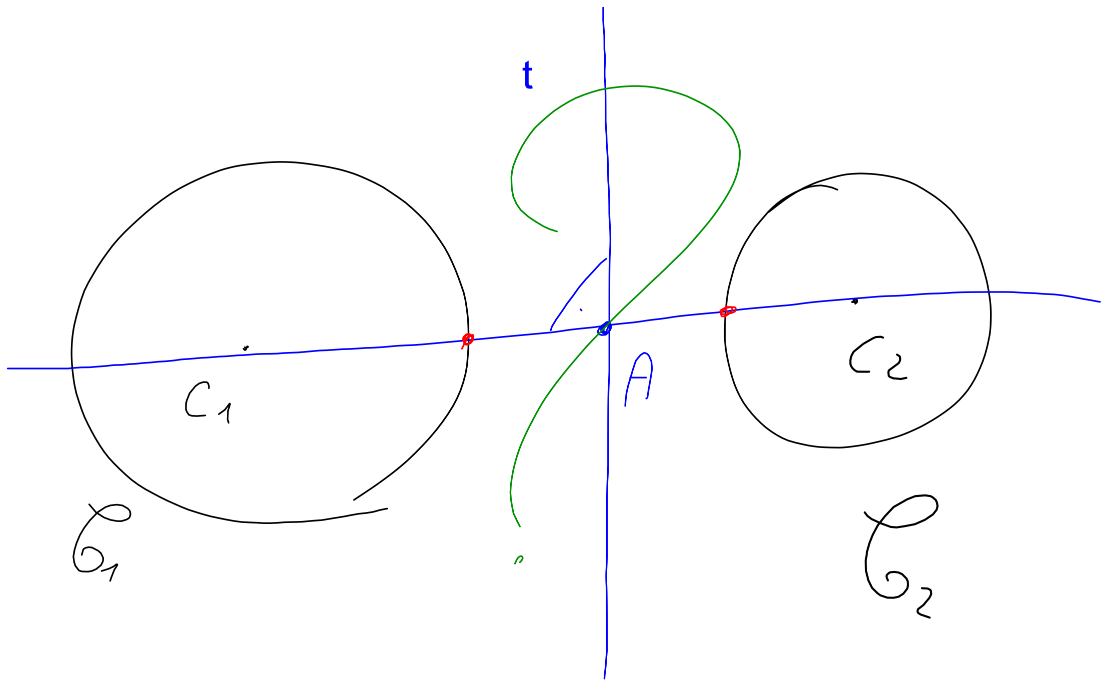
$$\Leftrightarrow -12x + \frac{240}{13} - 5y + \frac{475}{13} = 0$$

$$\Leftrightarrow -12x - 5y + \frac{715}{13} = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x + 5y - 55 = 0$$



$\mathcal{C}_1(C_1, \;)$
t
A
(C_1C_2)
$C_1(8;10)$
$C_2(-4;5)$
$\mathcal{C}_2(C_2, \;)$
$\Pi(x,y)$


t
A
C_1
C_2
$\mathcal{C}_1$
$\mathcal{C}_2$

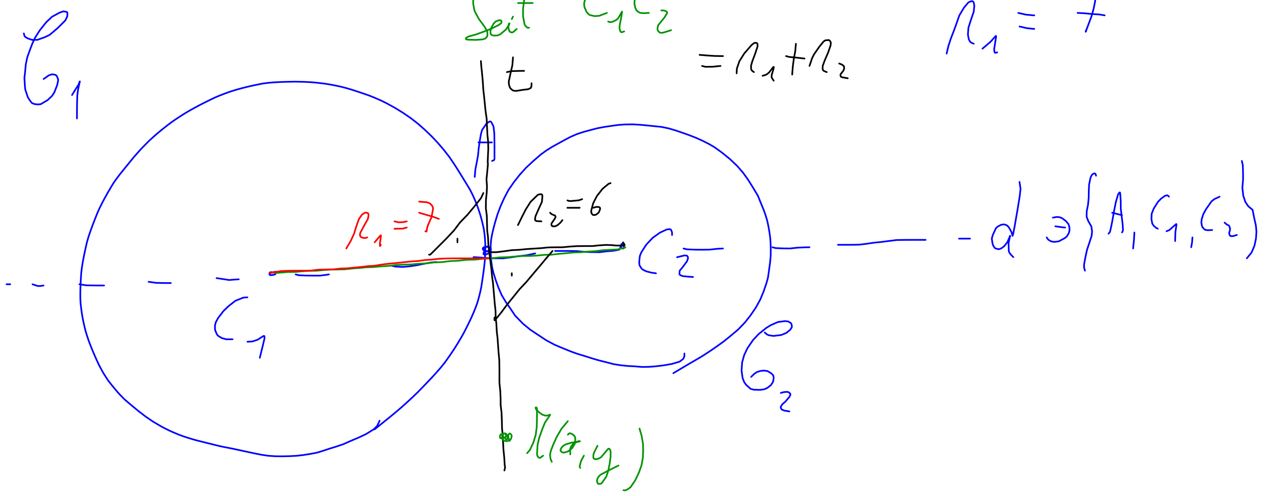
autre méthode :

$\mathcal{C}_2 : (x+4)^2+(y-5)^2=(6)^2$, $\mathcal{C}_1 : (x-8)^2+(y-10)^2=49$

$C_2(-4;5)$ et $r_2=6$ $\qquad C_1(8;10)$

Soit $C_1C_2 = \dots = 13$ $\qquad r_1 = 7$

$= r_1+r_2$



$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ tgts $\Leftrightarrow r_1 + r_2 = C_1C_2$

ou

$|r_1 - r_2| = C_1C_2$