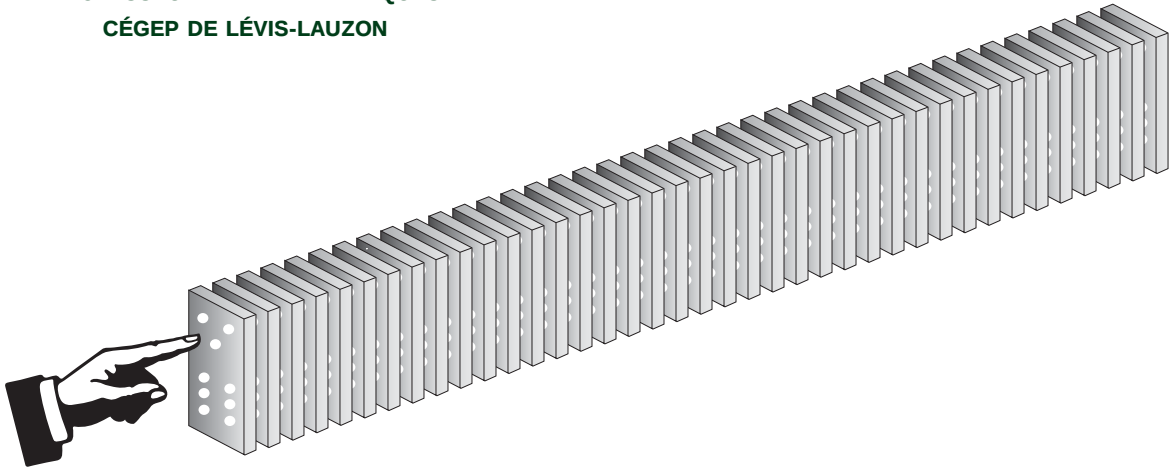


POUR QUE TOMBENT LES DOMINOS!

PAR : ANDRÉ ROSS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

CÉGEP DE LÉVIS-LAUZON



INTRODUCTION

Dans notre présentation sur l'étude des nombres par les pythagoriciens, nous avons constaté que le recours à l'induction est souvent indispensable pour établir les conjectures. Cependant, dans la section intitulée « Vous avez dit conjecture? » nous avons constaté que les énoncés ainsi obtenus peuvent être erronés. De plus, la recherche d'une démonstration ou d'un contre-exemple pour déterminer la valeur de vérité de l'énoncé d'une conjecture n'est pas toujours simple. Dans la présente section, nous allons présenter une méthode de démonstration due à Blaise Pascal (1602-1675). Cette méthode, appelée *preuve par récurrence* permet de démontrer plusieurs propriétés des nombres naturels (entiers positifs). Cette méthode de preuve se fonde sur un axiome, appelé *axiome d'induction*.

AXIOME D'INDUCTION

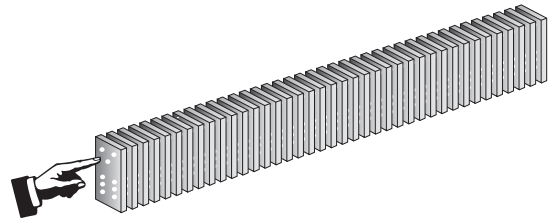
Le principe de l'axiome d'induction est traditionnellement illustré par deux analogies. Celle de la chaîne de dominos et celle de l'échelle du paradis. Nous présentons tout d'abord ces deux analogies qui nous permettront d'énoncer par la suite l'axiome d'induction.

Chaîne de dominos

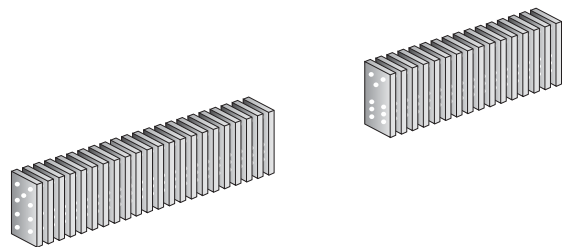
À quelles conditions peut-on faire tomber tous les dominos d'une chaîne?

Deux conditions doivent être satisfaites :

1. Il faut faire tomber le premier domino de la chaîne;



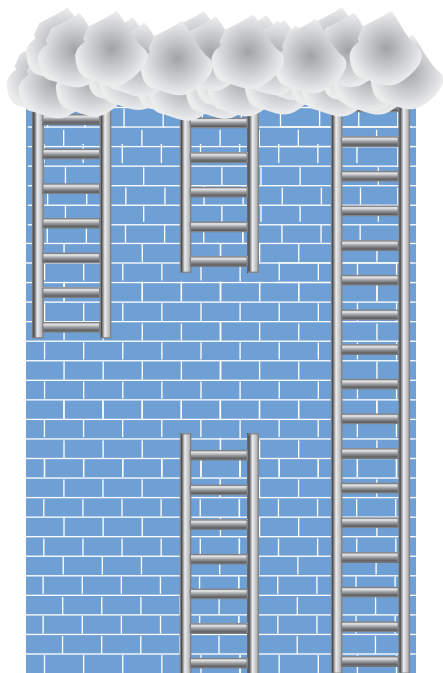
2. Il ne doit pas y avoir de brisure dans la chaîne, c'est-à-dire, il faut que chaque domino puisse faire tomber le domino suivant.



Il faut absolument que les deux conditions soient satisfaites pour pouvoir faire tomber tous les dominos de la chaîne, même si celle-ci s'étend indéfiniment.

Illustration de l'échelle

On peut également utiliser l'analogie de l'échelle du paradis pour illustrer l'axiome d'induction de Pascal. Des échelles métalliques sont fixées dans un mur de brique qui se perd dans les nuages pour illustrer que ces échelles se prolongent indéfiniment.



Pour atteindre les nuages (le paradis est nébuleux), on ne peut utiliser la première échelle car il est impossible d'atteindre le premier barreau. On ne peut non plus utiliser la deuxième échelle car il n'est pas toujours possible, à partir d'un barreau, d'atteindre le barreau suivant.

Seule la troisième échelle permet d'atteindre les nuages. En effet, les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. On peut atteindre le premier barreau.
2. Une fois sur un barreau, on peut toujours atteindre le barreau suivant, et ce, indéfiniment.

Ces deux conditions étant satisfaites, on peut parcourir l'échelle au complet (en y mettant le temps, bien sûr).

Les deux conditions nécessaires pour faire tomber la chaîne de dominos, ou pour parcourir l'échelle, sont celles que Pascal a énoncé dans son axiome d'induction.

Axiome d'induction

Si une proposition P relative à l'ensemble des nombres naturels, que nous noterons $\mathbb{N}^*$, satisfait aux deux conditions suivantes :

- La proposition est vraie pour $n = 1$; (on peut faire tomber le premier domino).
- Si la proposition est vraie pour k alors elle est vraie pour $k + 1$ (Chaque domino peut faire tomber le domino suivant).

Alors, on peut conclure que la proposition est vraie pour tout nombre naturel n (on peut faire tomber toute la chaîne en faisant tomber le premier domino).

REMARQUE

D'après le dictionnaire Robert, un *axiome* est une vérité indémontrable mais évidente par quiconque en comprend le sens.

Dans le langage courant, le mot axiome réfère à une proposition admise par tout le monde sans discussion.

Les allégories des dominos et des échelles avaient pour but de faire comprendre le sens. Si celui-ci est compris, on peut se servir de l'axiome pour démontrer des propriétés portant sur les nombres naturels.

• • •

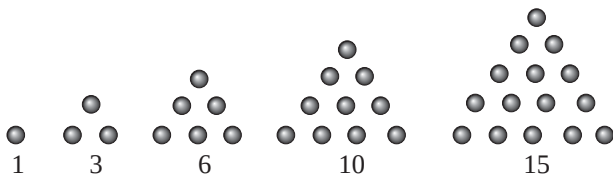
Pour effectuer une démonstration à l'aide de l'axiome d'induction, il faut :

- vérifier que la proposition est vraie pour $n = 1$;
- montrer que si la proposition est vraie pour $n = k$ alors elle est nécessairement vraie pour $n = k + 1$.

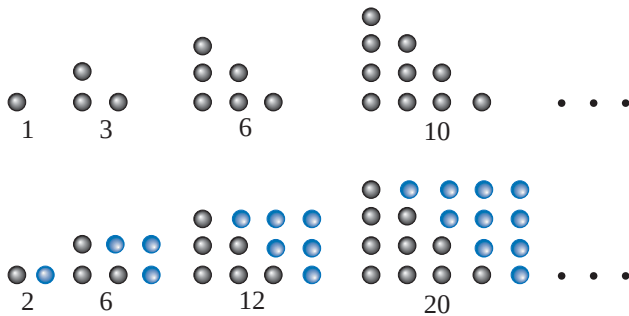
NOMBRES ET INDUCTION

NOMBRES TRIANGULAIRES

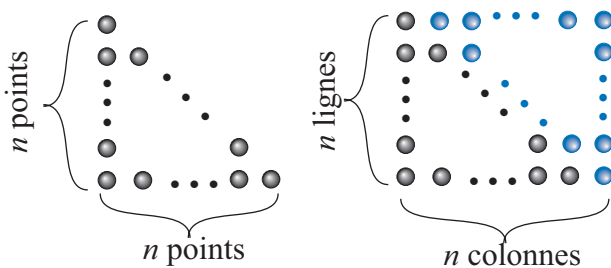
Considérons à nouveau la représentation géométrique des nombres des pythagoriciens qui leur avait permis d'établir plusieurs conjectures sur les nombres naturels. La forme algébrique générale de chaque forme géométrique constitue une conjecture. Considérons, par exemple, les premiers nombres triangulaires.



En disposant ces points pour former des triangles rectangles, les pythagoriciens avaient constaté qu'en doublant un nombre triangulaire, on forme un nombre oblong (nombre rectangulaire comportant une colonne de plus que le nombre de lignes). C'est ce qu'illustre les figures suivantes.



Les triangles rectangles sont isocèles, c'est-à-dire que le nombre de points est le même sur chaque côté de l'angle droit. De plus, en doublant les nombres et en disposant les points tel qu'illustré, ils obtenaient chaque fois, une colonne de plus que le nombre de lignes. Ils ont alors généralisé. En considérant le nombre triangulaire de rang n disposé en triangle rectangle et en doublant celui-ci, le rectangle obtenu devait comporter n lignes et n colonnes.



On peut facilement trouver le nombre de points du nombre rectangulaire, c'est le produit du nombre de lignes et du nombre de colonnes. Ils en concluaient que le nombre oblong de rang n , que nous noterons O_n , est le produit de ce nombre par son successeur. En écrite moderne, cela donne :

$$O_n = n(n + 1)$$

Et puisque le nombre oblong de rang n est le double du nombre triangulaire de rang n , cela signifie que le nombre

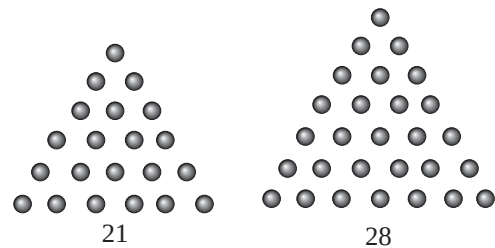
triangulaire de rang n est le demi-produit de ce nombre par son successeur. En écrite moderne, cela donne :

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

On ne représente plus les nombres par des points comme le faisaient les pythagoriciens. Une démonstration par représentation géométrique des nombres n'a plus cours de nos jours. Cependant, le nombre triangulaire de rang n est la somme des n premiers nombres entiers et cette somme est encore utilisée. Il faut donc utiliser une approche moderne pour démontrer ce résultat. On peut être tenté de tester la conjecture en vérifiant que les nombres triangulaires suivants sont de la même forme générale. Notre conjecture permet de prévoir que le sixième et le septième nombres triangulaires sont :

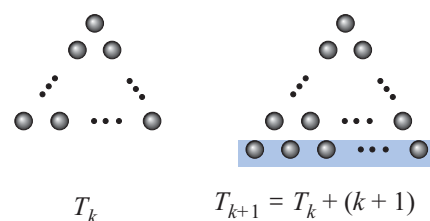
$$T_6 = \frac{6(6+1)}{2} = 21 \text{ et } T_7 = \frac{7(7+1)}{2} = 28.$$

Ce qui est confirmé par les figures suivantes.



On sait qu'il est impossible de faire une telle vérification pour tous les nombres triangulaires, on aura toujours une induction incomplète par cette approche. Il faut donc adopter une autre approche pour démontrer ce résultat. Nous verrons maintenant comment utiliser l'axiome d'induction pour démontrer cette conjecture.

Avant de procéder, rappelons une caractéristique dont nous servirons dans la démonstration, le nombre triangulaire de rang k est la somme des k premiers entiers. Ainsi, si on connaît le nombre de rang k , il faut donc lui additionner $k + 1$ (le gnomon) pour obtenir le nombre triangulaire de rang $k + 1$.



Conjecture

Nombres triangulaires

Le nombre triangulaire de rang n est de la forme :

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration

Pour démontrer cette conjecture par l'axiome d'induction, il faut :

1. Vérifier que la proposition est vraie pour $n = 1$.

On doit donc vérifier qu'en posant $n = 1$ dans la forme générale de la conjecture, on obtient bien le premier nombre triangulaire. Ce qui donne :

$$T_1 = \frac{1 \times (1+1)}{2} = 1$$

2. montrer que si la proposition est vraie pour k alors elle est nécessairement vraie pour $k + 1$.

Il faut donc montrer que si le nombre de rang k est de la forme de la conjecture, alors le nombre de rang $k + 1$ sera de la même forme.

Supposons que le nombre de rang k est de la forme

$$T_k = \frac{k(k+1)}{2}, \text{ ce qui signifie que } T_k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Montrons cette hypothèse implique que le terme de rang $k + 1$ est de la même forme.

Pour passer du terme de rang k au terme de rang $k + 1$, il faut additionner $k + 1$. Or, nous avons posé en hypothèse que le terme de rang k est de la forme :

$$T_k = \frac{k(k+1)}{2}$$

En lui additionnant $k + 1$. On obtient alors :

$$T_k = T_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

En mettant au même dénominateur, on a :

$$T_k = T_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$$

En mettant $(k + 1)$ en évidence :

$$T_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

C'est le nombre triangulaire de rang $k + 1$. On doit maintenant vérifier si la formule de la conjecture permet d'obtenir le même résultat.

En posant $n = k + 1$ dans $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, on obtient également :

$$T_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Par conséquent, en additionnant $k + 1$ au nombre triangulaire de rang k , on obtient le même résultat qu'en substituant $k + 1$ à n dans la forme générale. On peut donc conclure que :

Si la propriété est vraie pour k , alors elle est vraie pour $k + 1$.

Conclusion

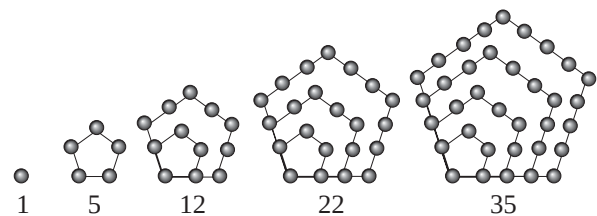
Puisque les deux conditions de l'axiome d'induction sont satisfaites, on peut conclure que la propriété est vraie pour tout nombre naturel. On a donc démontré que le nombre triangulaire de rang n est de la forme

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

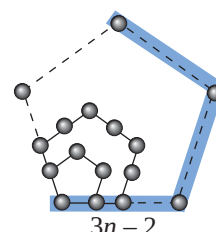
.....

NOMBRES PENTAGONAUX

Considérons un deuxième exemple, celui des nombres pentagonaux.

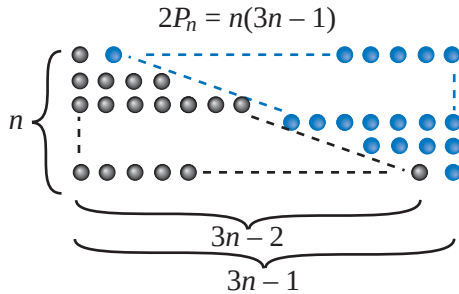


Les pythagoriciens avaient établi que le gnomon de ces nombres est $3n - 2$, ce qui signifie que pour obtenir le nombre pentagonal de rang $k + 1$, il faut additionner $3k - 2$ au nombre de rang k .



En représentant les nombres pentagonaux par des triangles rectangles de points, ils avaient également établi que, P_n , le nombre pentagonal de rang n est donné par :

$$P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$$



Nous allons maintenant démontrer cette conjecture par récurrence.

Conjecture

Nombres pentagonaux

Le nombre pentagonal de rang n est :

$$P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Démonstration

• Vérifier que la proposition est vraie pour $n = 1$.

En posant $n = 1$ dans l'expression $P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$, on

obtient : $P_1 = \frac{1(3 \times 1 - 1)}{2} = 1$.

La première condition est satisfaite puisque le nombre 1 est bien le premier nombre pentagonal.

2. montrer que si la proposition est vraie pour k alors elle est nécessairement vraie pour $k + 1$.

Supposons maintenant que la propriété est vraie pour $n = k$, ce qui signifie :

$$P_k = \frac{k(3k-1)}{2}$$

Pour obtenir le nombre de rang k , on doit additionner $3k + 1$ à P_k , ce qui donne :

$$P_{k+1} = P_k + (3k+1) = \frac{k(3k-1)}{2} + (3k+1)$$

En mettant au même dénominateur, on obtient :

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= \frac{k(3k-1)}{2} + \frac{2(3k+1)}{2} \\ &= \frac{3k^2 - k + 6k + 2}{2} = \frac{3k^2 + 5k + 2}{2} \end{aligned}$$

En décomposant en facteurs, on obtient :

$$P_{k+1} = \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$$

Il nous reste à vérifier si la forme générale décrite dans l'énoncé de la conjecture permet également d'obtenir ce nombre. En substituant $k + 1$ à n dans la formule de la conjecture, on obtient :

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2} = \frac{(k+1)(3k+3-1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(3k+2)}{2} \end{aligned}$$

On constate qu'en additionnant $3k + 1$ au nombre pentagonal de rang k , on obtient le même nombre qu'en substituant $k + 1$ à n dans la formule de la conjecture. Cela signifie que si la propriété est vraie pour k , alors elle est vraie pour $k + 1$ puisqu'on obtient le même résultat par les deux méthodes.

Conclusion

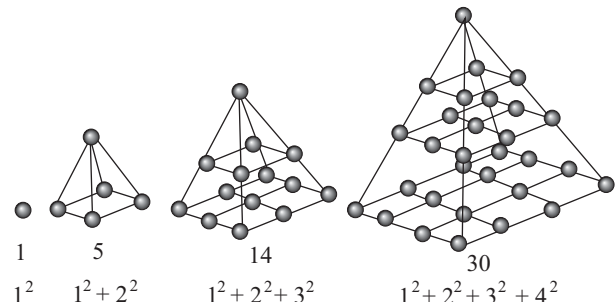
Puisque les deux conditions de l'axiome d'induction sont satisfaites, on peut conclure que la propriété est vraie pour tout nombre naturel. Par conséquent, le nombre pentagonal de rang n est donné par :

$$P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$$



NOMBRES PYRAMIDAUX

Considérons maintenant les nombres pyramidaux à base carrée dont les premiers sont donnés dans l'illustration suivante :



Le nombre pyramidal de rang n est donc la somme des n

premiers nombres carrés. Pour déterminer la forme générale de ces nombres, il faut comparer les nombres à leur rang.

n	nombre	factorisation
1	1	1
2	5	5
3	14	2×7
4	30	$2 \times 3 \times 5$
5	55	5×11
6	91	7×13
7	140	$4 \times 7 \times 5$
8	204	$3 \times 4 \times 17$
9	285	$3 \times 5 \times 19$
10	385	$5 \times 11 \times 7$
11	506	$2 \times 11 \times 23$

Il est difficile à première vue de détecter une régularité. Cependant, on constate quand même certaines choses. Ainsi, en considérant le dernier facteur à partir du nombre de rang 5, on voit les nombres 11, 13, 5, 17, 19, 7, 23. On peut penser que certains de ces nombres ont été simplifié par 3 et que la suite des derniers facteurs devrait être 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23. Il est possible que la forme générale ait un dénominateur dont 3 serait un facteur. Vérifions cette intuition en multipliant chacun des nombres par 3. On obtient alors le tableau suivant :

n	nombre	nombre $\times 3$	factorisation
1	1	3	1×3
2	5	15	3×5
3	14	42	$3 \times 2 \times 7$
4	30	90	$2 \times 5 \times 9$
5	55	165	$3 \times 5 \times 11$
6	91	273	$3 \times 7 \times 13$
7	140	420	$7 \times 4 \times 15$
8	204	612	$4 \times 9 \times 17$
9	285	855	$9 \times 5 \times 19$
10	385	1155	$5 \times 11 \times 21$
11	506	1518	$6 \times 11 \times 23$

On constate maintenant que le dernier facteur est toujours $2n + 1$. En observant les deux autres facteurs, on constate que lorsque le rang n est impair, le rang est un facteur et

l'autre facteur est $(n + 1)/2$. De plus, lorsque le rang n est pair, $(n + 1)$ est un facteur et l'autre facteur est $n/2$. Par conséquent, 2 est probablement un facteur du dénominateur dans la forme générale. Vérifions cette intuition en modifiant les données du tableau :

n	nombre	nombre $\times 2 \times 3$	factorisation
1	1	3	$1 \times 2 \times 3$
2	5	15	$2 \times 3 \times 5$
3	14	42	$3 \times 4 \times 7$
4	30	90	$4 \times 5 \times 9$
5	55	165	$5 \times 6 \times 11$
6	91	273	$6 \times 7 \times 13$
7	140	420	$7 \times 8 \times 15$
8	204	612	$8 \times 9 \times 17$
9	285	855	$9 \times 10 \times 19$
10	385	1155	$10 \times 11 \times 21$
11	506	1518	$11 \times 12 \times 23$
.....			
n	PC_n	$6 \times PC_n$	$n(n + 1)(2n + 1)$

On obtient donc : $6 \times PC_n = n(n + 1)(2n + 1)$, d'où :

$$PC_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

La conjecture sur la forme de ces nombres est la suivante :

Conjecture

Nombres pyramidaux à base carrée

Le nombre pyramidal à base carrée de rang n est :

$$PC_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On peut également énoncer la conjecture sous la forme suivante :

Conjecture

Somme des carrés des n premiers entiers

La somme des carrés des n premiers nombres naturels est :

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Démonstration• **Vérifier que la proposition est vraie pour $n = 1$.**

La première étape est de vérifier que la propriété est vraie pour $n = 1$. Pour ce faire, on posera $n = 1$ dans la formule décrivant la propriété à démontrer, ce qui donne :

$$S_1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

La propriété est donc vraie pour $n = 1$.

2. montrer que si la proposition est vraie pour k alors elle est nécessairement vraie pour $k + 1$.

La deuxième étape consiste à montrer que si la propriété est vraie pour k alors elle est vraie pour $k + 1$. Supposons donc que la proposition est vraie pour k , c'est-à-dire que la somme des carrés des k premiers nombres naturels est donnée par :

$$S_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

La somme des carrés des $k + 1$ premiers nombres naturels est alors obtenue en additionnant le carré suivant, soit :

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

En mettant au même dénominateur, on obtient

$$S_{k+1} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6}$$

et en mettant $k + 1$ en évidence, on a :

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\ &= \frac{(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6]}{6} \\ &= \frac{(k+1)[2k^2 + 7k + 6]}{6} \end{aligned}$$

et, en décomposant en facteurs, on obtient :

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+1)}{6}$$

On doit maintenant s'assurer que ce nombre, qui est la somme des carrés $k + 1$ premiers nombres naturels, est également obtenu en posant $n = k + 1$ dans la formule de la conjecture. En procédant à cette substitution, on obtient :

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+1)}{6}$$

On remarque que ce résultat est exactement celui auquel on est parvenu en additionnant $(k + 1)^2$ à la somme des carrés k premiers nombres naturels. On a donc montré que :

si la propriété est vraie pour k alors elle est vraie pour $k + 1$.

Conclusion

Les deux conditions étant satisfaites, l'axiome d'induction permet de conclure que la proposition est vraie pour tout nombre naturel n . Par conséquent, la somme des carrés des n premiers nombres naturels est donnée par

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

.....

REMARQUE

Pour que l'argumentation soit complète, il faut tirer la conclusion que permet de tirer l'axiome d'induction.

.....

CONCLUSION

Le texte sur les conjectures nous avait sensibilisé au fait que l'on ne peut avoir de certitude quant aux propriétés des nombres en ne faisant que des vérifications ponctuelles. Par son axiome d'induction, Pascal a introduit une méthode de démonstration qui reconnaît et exploite le fait que l'ensemble des nombres naturels est un infini potentiel au sens d'Aristote.

La caractéristique des nombres naturels qui font de cet ensemble un infini potentiel est qu'en partant de 1 et en additionnant 1 de façon récursive, on balaie tout l'ensemble des nombres naturels. Cela signifie qu'en prenant un nombre naturel quelconque, on obtient le suivant en additionnant 1. Comme les analogies des dominos et de l'échelle l'indiquent, Pascal a exploité cela en considérant qu'une propriété portant sur les nombres qui est vraie pour $n = 1$ et qui chaque fois qu'elle est vraie pour k , est nécessairement vraie pour $k + 1$ sera nécessairement vraie pour tous les nombres naturels.

Blaise Pascal 1623-1662

Blaise Pascal, mathématicien français né à Clermont-Ferrand. Son père Étienne était lui-même mathématicien amateur et le limaçon de Pascal a été nommé en son honneur à la suggestion de Gilles Personne de Roberval (1602-1675).



Vers 1634, Blaise s'initie aux mathématiques contre la volonté de son père qui craignait que cette étude ne le passionne au point de nuire à sa santé et à l'étude du latin et des langues. Cependant, il surprend un jour son fils, âgé de 12 ans, cherchant à résoudre des problèmes dans une géométrie qu'il avait lui-même développée. Étonné de la précocité de son fils, il lève l'interdiction et lui donne une copie des *Éléments* d'Euclide.

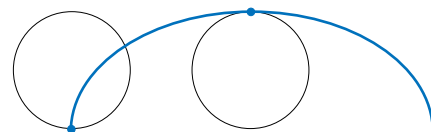
Par la suite, Blaise entreprend l'étude des travaux de Gérard Désargues (1591-1661). À 14 ans, il est admis à l'Académie de Marin Mersenne (1588-1648) dont font également partie Désargues, Roberval et son père Étienne Pascal. Dès l'âge de 16 ans, il y expose des théories intéressantes dont la découverte d'une propriété des coniques appelée par la suite hexagone de Pascal. Parmi ses contributions mathématiques, il faut signaler l'invention d'une machine à calculer, des travaux sur les probabilités qui lui ont permis d'établir un lien entre les probabilités, le triangle arithmétique et les combinaisons et d'élaborer la méthode de démonstration connue sous le nom d'induction mathématique.

Pascal s'est intéressé entre autres à l'étude des coniques, aux probabilités et à l'analyse. En 1646, il est informé des expériences de Torricelli sur la pesanteur et réalise des expériences pour en vérifier les conclusions, en particulier

l'expérience du Puy de Dôme qui est un moment important de la physique. Profondément religieux, converti au jansénisme, il abandonne tout en 1654 pour suivre les jansénistes. Il rejoint alors sa jeune soeur à Port-Royal. Les jésuites ayant attaqué les jansénistes, Pascal leur répondit en 1656 et 1657 par dix-huit lettres appelées *Lettres Provinciales* qui constituent une des grandes créations de la littérature française. Dans le même temps, il entretient une correspondance mathématique avec Fermat, Huygens et de Sluse [(René François (1622-1685))].

En 1658, il fait un retour aux mathématiques, souffrant d'un mal de dents il s'attaque à l'étude de la cycloïde (voir texte ci-dessous) pour se distraire. En décembre 1658, Pascal publie neuf fascicules sous le nom de Amos Dettonville (un anagramme de Louis de Montalte rendu célèbre par les *Lettres Provinciales*). Dans ces fascicules, il présente les méthodes et résultats de ses travaux mathématiques. En 1659, gravement malade il abandonne définitivement toute recherche scientifique et consacre ses dernières années à la rédaction de ses *Pensées*. Le 19 août 1662, il meurt, à l'âge de 39 ans.

CYCLOÏDE



Cette courbe est le lieu décrit par un point sur la circonférence d'un cercle qui roule en ligne droite. Elle fut étudiée pour la première fois par Nicolas de Cuse (1401-1464) dans une tentative pour trouver l'aire d'un cercle par intégration. C'est Marin Mersenne qui en a donné une définition satisfaisante et qui a énoncé les propriétés évidentes comme le fait que la longueur de la base est égale à la circonférence du cercle générateur. Il tenta de trouver l'aire sous la courbe mais n'y parvenant pas il a posé le problème à d'autres mathématiciens.

Marin Mersenne 1588-1648

Marin Mersenne est connu pour sa correspondance avec tous les savants et philosophes de son époque. Par cette correspondance, il a contribué à transmettre les découvertes et à favoriser les échanges d'idées entre les savants. Il est également connu pour ses travaux en théorie des nombres.



Il s'est joint à l'ordre religieux des Minimes en 1611 et a d'abord enseigné la philosophie au couvent de la congrégation à Nevers. Sa cellule, à Paris, était un lieu de rendez-vous des savants de l'époque qui, par la correspondance que Mersenne entretenait, étaient ainsi informés des découvertes de tous les savants européens. Cette correspondance a joué un rôle important durant cette période car les revues scientifiques n'existaient pas encore. À sa mort, on découvrit dans sa cellule des lettres de 78 correspondants incluant Fermat, Huygens, Pell, Galilée et Torricelli.

Mersenne s'est porté à la défense des idées de Descartes et de Galilée contre les attaques et critiques des théologiens et s'est élevé contre les pseudo sciences que sont l'alchimie et l'astrologie. Il a poursuivi certains des travaux de Galilée en optique et proposé à Huygens l'utilisation du pendule pour mettre au point la première horloge à pendule. Il a également traduit et publié certains des travaux de Galilée, contribuant à les faire connaître à l'extérieur de l'Italie.

Mersenne s'est adonné à l'étude des nombres premiers et a tenté de trouver une formule décrivant tous les nombres premiers. Il n'a pas réussi dans ses tentatives, mais elles lui ont permis d'étudier les nombres premiers de la forme :

$$2^p - 1$$

qui est intéressante pour l'étude des grands nombres premiers. Il est facile de montrer que si $n = 2^p - 1$ est premier,

alors p est également premier. Lorsque l'exposant est premier cependant, la situation est moins claire. Ainsi, on obtient :

$$2^2 - 1 = 3, 2^3 - 1 = 7, 2^5 - 1 = 31 \text{ et } 2^7 - 1 = 127$$

qui sont des nombres premiers. Cependant,

$$2^{11} - 1 = 2\,047 \text{ est le produit de } 23 \text{ par } 89$$

et n'est donc pas premier.

En 1644, Mersenne affirma que $n = 2^p - 1$ est premier lorsque $p \in \{2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257\}$ et que $n = 2^p - 1$ n'est pas premier pour les 44 autres nombres premiers plus petits que 257.

Mersenne s'est cependant trompé pour quelques-uns de ces nombres. En effet, pour les valeurs 61, 89 et 107 de p , $n = 2^p - 1$ est un nombre premier.

De plus, si $p = 67$, $n = 2^p - 1$ n'est pas un nombre premier. Ce fait a été démontré en 1867 par Édouard Lucas (1842-1891) par une démonstration indirecte sans que des facteurs ne soient trouvés. C'est en 1903 que Frank Nelson Cole obtint une décomposition en facteurs :

$$\begin{aligned} 2^{67} - 1 &= 147\,573\,952\,588\,676\,412\,927 \\ &= 193\,707\,721 \times 761\,838\,257\,287 \end{aligned}$$

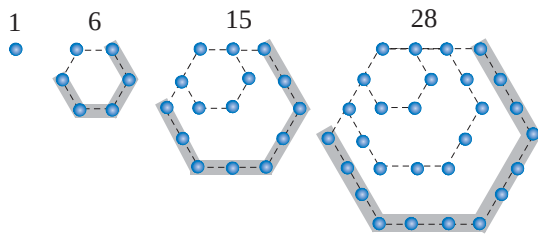
Malgré ces erreurs, les nombres de Mersenne constituent une source intéressante de nombres premiers mais on ne sait pas encore comment déterminer si un nombre de Mersenne est premier ou non. Cela illustre encore le fait que l'induction n'est pas suffisante pour établir une connaissance fiable. Nos illustrations portent sur les propriétés des nombres parce que ces situations sont assez simples à comprendre, même si les conjectures ne sont pas toujours évidentes à formuler. Cependant, il faut toujours douter de résultats qui ne se fondent que sur l'induction. À cet égard, citons Pascal :

Destruendum sufficit unum

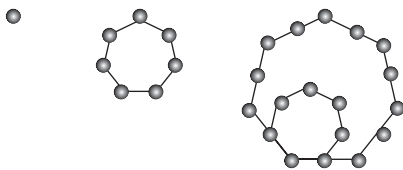
Pour montrer la fausseté d'une conjecture, il suffit d'un cas contraire (un contre-exemple).

EXERCICES

1. Considérant la représentation géométrique des nombres hexagonaux donnés dans l'illustration suivante :



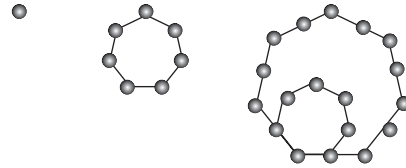
- Déterminer une conjecture permettant de trouver le nombre hexagonal de rang n .
 - Vérifier la plausibilité de cette conjecture en calculant les nombres hexagonaux de rang 5, 6, 7 et 8.
 - Sans faire de calculs, expliquer ce qu'il faudrait faire pour vérifier que cette conjecture est valide pour le seizième nombre hexagonal.
 - En supposant que la conjecture est vraie pour le k^{e} nombre hexagonal, que faut-il faire pour vérifier qu'elle est vraie pour le $(k + 1)^{\text{e}}$ nombre hexagonal?
 - Démontrer la conjecture par la méthode de récurrence.
2. Considérant la représentation géométrique des nombres heptagonaux donnés dans l'illustration suivante :



- Déterminer une conjecture permettant de trouver le nombre heptagonal de rang n .
- Vérifier la plausibilité de cette conjecture en calculant les nombres heptagonaux de rang 8 et 9.
- Sans faire de calculs, expliquer ce qu'il faudrait faire pour vérifier que cette conjecture est valide pour le trentième nombre heptagonal.
- En supposant que la conjecture est vraie pour le k^{e} nombre heptagonal, que faut-il faire pour vérifier qu'elle est vraie pour le $(k + 1)^{\text{e}}$ nombre heptagonal?

- Démontrer la conjecture par la méthode de récurrence.

3. Considérant la représentation géométrique des nombres octogonaux donnés dans l'illustration suivante :



- Déterminer une conjecture permettant de trouver le nombre heptagonal de rang n .
 - Vérifier la plausibilité de cette conjecture en calculant les nombres octogonaux de rang 8 et 9.
 - Sans faire de calculs, expliquer ce qu'il faudrait faire pour vérifier que cette conjecture est valide pour le trentième nombre heptagonal.
 - Démontrer la conjecture par la méthode de récurrence.
4. Montrer par la méthode de récurrence que pour tout nombre naturel n ,

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

5. Montrer par la méthode de récurrence que pour tout nombre naturel n ,

$$4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 \dots + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{3}.$$

6. Montrer par la méthode de récurrence que pour tout nombre naturel n ,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

7. Montrer par la méthode de récurrence que pour tout nombre naturel n ,

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

8. Montrer par la méthode de récurrence que pour tout nombre naturel n ,

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1.$$

9. Montrer que si l'égalité

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{1}{8}(2n+1)^2$$

est vraie pour $n = k$ alors elle est vraie pour $n = k + 1$.

Peut-on dire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{1}{8}(2n+1)^2?$$

Justifier.

9. Effectuer les sommes suivantes.

$$\frac{1}{1 \times 2} =$$

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} =$$

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} =$$

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} =$$

À l'aide de ces résultats, conjecturer une formule donnant la somme suivante

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Démontrer cette propriété à l'aide de l'axiome d'induction.

10. Montrer par la méthode de récurrence que pour tout nombre naturel n ,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right).$$

11. Montrer par induction par la méthode de récurrence que pour tout nombre naturel n ,

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

12. Effectuer les sommes partielles suivantes

$$1 =$$

$$1 + 3 =$$

$$1 + 3 + 5 =$$

$$1 + 3 + 5 + 7 =$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$$

a) Quelle conjecture vous suggèrent ces résultats?

b) Vérifier si cette conjecture est vraie dans d'autres cas particuliers.

c) Démontrer cette conjecture.

13. Effectuer les sommes partielles suivantes

$$1 \times 2 =$$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 =$$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 =$$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 =$$

a) Quelle conjecture vous suggèrent ces résultats ?

b) Vérifier si cette conjecture est vraie dans d'autres cas particuliers.

c) Démontrer cette conjecture.

14. Effectuer les sommes partielles suivantes

$$1 \times 3 =$$

$$1 \times 3 + 3 \times 5 =$$

$$1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 =$$

$$1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 =$$

a) Quelle conjecture suggèrent ces résultats ?

b) Vérifier si cette conjecture est vraie dans d'autres cas particuliers.

c) Démontrer cette conjecture.

15. Effectuer les sommes partielles suivantes

$$1 \times 3 =$$

$$1 \times 3 + 2 \times 4 =$$

$$1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 =$$

$$1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 6 =$$

$$1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 6 + 5 \times 7 =$$

$$1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 6 + 5 \times 7 + 6 \times 8 =$$

a) Quelle conjecture suggèrent ces résultats ?

b) Vérifier si cette conjecture est vraie dans d'autres cas particuliers.

c) Démontrer cette conjecture.

16. Démontrer par induction que $n^2 + n$ est divisible par 2 pour tout nombre entier n .

17. Démontrer par induction que $n^3 - n$ est divisible par 6 pour tout nombre entier n .

18. Démontrer par induction que $n^5 - n$ est divisible par 30 pour tout nombre entier n .