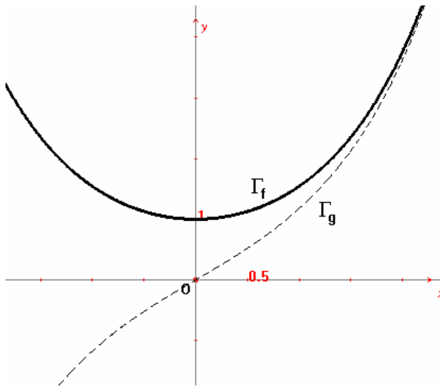
§11 <u>Asymptotes</u>

11.1 Introduction



Soit Γ_f le graphique d'une fonction f et M(x ;f(x)) un point de Γ_f.
Si l'une des limites a ou b de l'expression $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ est infinie,
on dit que l'une des coordonnées de M tend vers l'infini et que le point M est à l'infini.

Cette expression ne nous renseigne pas sur l'allure du graphique Γ_f.
On compare alors le graphique Γ_f de f avec celui d'une fonction g plus simple et dont on connaît Γ_g dans la région considérée.
Ces courbes auxiliaires s'appellent des **asymptotes** .

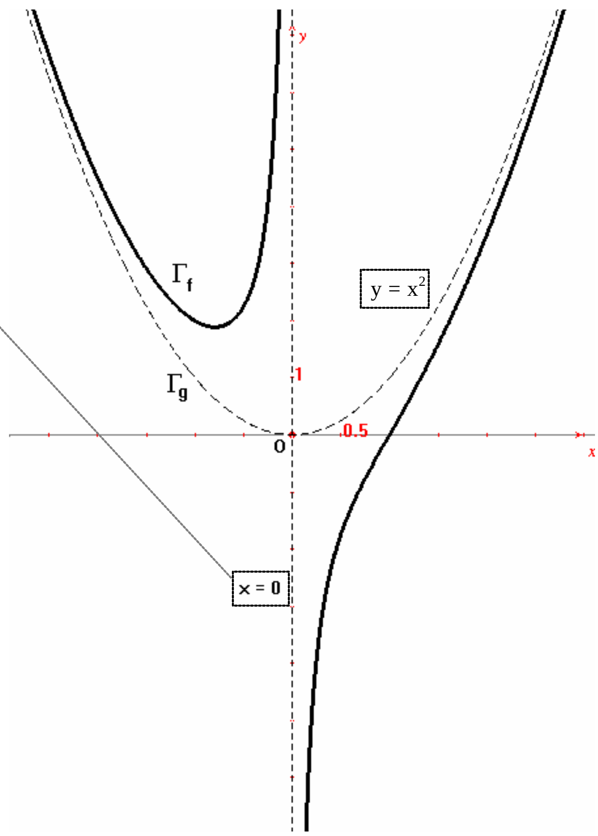
11.2 Asymptotes verticales

Définition 10 : La droite d'équation $\boxed{x = a}$ est une asymptote verticale à droite du graphique Γ_f d'une fonction f si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \pm\infty$

ou est une asymptote verticale à gauche du graphique Γ_f d'une fonction f si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \pm\infty$.

Exemple : soit la fonction f définie par $y = f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x}$. *(cf. figure ci-dessous)*

On a ici $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{x^3 - 1}{x} = \left(\dfrac{-1}{0_+}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{x^3 - 1}{x} = \left(\dfrac{-1}{0_-}\right) = +\infty$ et donc
la droite $\boxed{x = 0}$ est asymptote verticale du graphique Γ_f .



11.3 Asymptotes à l'infini

Définition 11 : Soit f et g deux fonctions. On dit que le graphique Γ_g de la fonction g est asymptote à l'infini du graphique Γ_f de la fonction f si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - g(x) \right] = 0$.

Exemple et interprétation graphique :

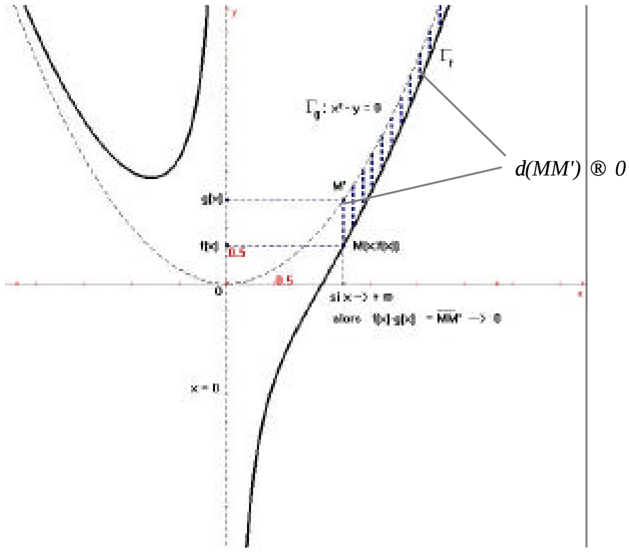
Reprenons l'exemple précédent : $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x}$. Le graphique Γ_g de la fonction g définie par $y = g(x) = x^2$ est asymptote (curviligne) de Γ_f car

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - g(x) \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3 - 1}{x} - x^2 \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3 - 1 - x^3}{x} \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{-1}{x} \right] = 0$$

Soit $M(x\,;f(x)) \in \Gamma_f$ et $M'(x\,;g(x)) \in \Gamma_g$ alors

$\delta(MM') = \left| \overline{MM'} \right| = \left| f(x) - g(x) \right| = \left| \dfrac{1}{x} \right|$

et le graphique Γ_g est asymptote à l'infini de Γ_f si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \delta(MM') = 0$.



Le graphique Γ_g de la fonction g est asymptote de Γ_f si la distance des points M et M' tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$).

Calcul des asymptotes aux infinis :

1) Si f est une fonction rationnelle définie par $y = f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, alors il existe deux fonctions polynômes q(x) et r(x) telles que $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \dfrac{r(x)}{Q(x)}$ et $\deg(r) \leqslant \deg(Q)$.

   Ainsi $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \dfrac{r(x)}{Q(x)} \Leftrightarrow f(x) - q(x) = \dfrac{r(x)}{Q(x)}$; comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{r(x)}{Q(x)} = 0$ *(théorème du cours)* on a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - q(x) = 0$ et donc, par définition, le graphique Γ_q de la fonction q est asymptote du graphique Γ_f de la fonction f.

2) Si f n'est pas une fonction rationnelle, alors on peut rechercher les éventuelles asymptotes affines aux infinis avec le théorème suivant :

Théorème 21 : Si Γ_f admet une asymptote affine à l'infini d'équation $y = g(x) = mx + h$,

alors $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{f(x)}{x} \right]$ et $h = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx \right]$ ou

alors $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{f(x)}{x} \right]$ et $h = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - mx \right]$.