

* Les fonctions $\exp_a$ (exponentielle de base a)
et $\log_a$ (logarithme de base a) avec $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

Point de vue algébrique :

* Soit $a \in \mathbb{R}$, on note $a^m = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ facteurs}}$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$
(puissance m -ième)

* Formules; $\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\ \textcircled{2} (a^m)^n = a^{m \cdot n} \end{array} \right\} \forall \{m, n\} \in \mathbb{N}^*$

$\textcircled{3} \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ si $m > n$ et $a \neq 0$

* Problèmes $\textcircled{1}$ exemple: $\frac{a^2}{a^2} = 1$, $\forall a \neq 0$

Si $m=n$, on a aussi: $\frac{a^m}{a^m} = 1 = a^{m-m} = a^0$

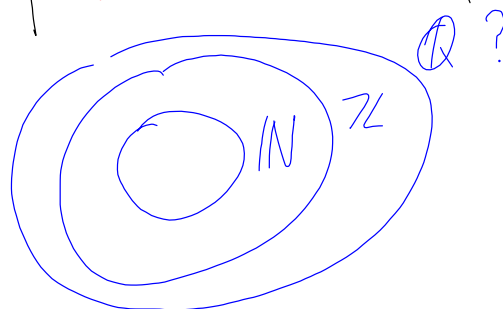
Convention: $n=1$ $a^0 = 1$ si $a \neq 0$

(Δ 0^0 n'est pas défini)

$$\textcircled{2} a^{-3} = a^{4-7} = \frac{a^4}{a^7} = \frac{a^4 \cdot 1}{a^4 \cdot a^3} = \frac{1}{a^3}, a \neq 0$$

Convention $n=2$: $m \in \mathbb{N}^*$, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

On démontre que $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$ $\textcircled{3}$ sont vrais, $\forall \{m, n\} \in \mathbb{Z}$



* Etape suivante: quel sens donner à $a^{\frac{p}{q}}$ avec $\{p, q\} \subset \mathbb{N}^*$ et tel que $\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3}$ restent valides.

* Définition: $a^{\frac{p}{q}} =: \sqrt[q]{a^p}$ et $q \neq 1, a > 0$
et on peut démontrer que $\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3}$ restent valides, $\forall \{m, n\} \subset \mathbb{Q}$.

ici $a \in \mathbb{R}_+^*$

* Dernière étape: extension à $\mathbb{R}$: admis!
On a alors construit une famille d'applications:
les fonctions "exponentielles de base a "

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto a^x, a \in \mathbb{R}_+^*$$

exemple: si $a=3$:
alors $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
 $3^0 = 1$
 $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
 $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
 $3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$
 $3^{\sqrt{2}} = ?$ est défini sur $\mathbb{R}$
 $3^{\pi} = ?$
Ces fonctions " $\exp_a$ " sont bijectives sauf si $a=1$!

* On définit leurs réciproques:

$$\exp_a^{-1} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto y = \exp_a^{-1}(x)$$

$$\text{avec } y = \exp_a^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \exp_a(y)$$

$$\text{notation: } \log_a = \exp_a^{-1}$$

$$\text{ainsi: } \log_a : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \\ x \longmapsto y = \log_a(x)$$

$$\text{avec } y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$$

exemples:

$$\log_{10}(1000) = \quad \text{car } 10 = 1000$$

$$\log_2(32) = \quad \text{car } 2 = 32$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(4) = \quad \text{car } \left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

$$\log_3(2) = ? \quad \text{car } 3^{\dots} = 2$$

ona: formule de changement de base :

$$\log_a(x) = \frac{\log_e(x)}{\log_e(a)}$$

car $3^{0,63} \approx 2$

ainsi :

$$\log_3(2) = \frac{\log_e(2)}{\log_e(3)} \approx 0,63 = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$$