- **Théorème 12** : *(Théorème des deux gendarmes)*
  Soit f , g et h trois fonctions , définies ou non en x_0 , et définies sur un intervalle ouvert I contenant x_0 ,
  si $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in I$, et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a$

L'existence de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{t \to \ell} g(t)$ ne suffit pas en général à déterminer $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x))$.

Toutefois, on a les théorèmes :

- **Théorème 13** : 1) Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et si de plus $\lim\limits_{x \to \ell} g(x) = g(\ell)$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = g[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)] = g(\ell)$

  2) Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et si de plus $f(x) \neq \ell$ sur un intervalle ouvert contenant x_0,

  sauf éventuellement en x_0, alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim\limits_{t \to \ell} g(t)$

- Exemples :

§9 Limites trigonométriques

- **Théorème 14** : 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$ 2) $\lim\limits_{x \to x_0} \cos(x) = \cos(x_0)$

  3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

- Exercices : 1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x} = 0$ 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ 3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$

§10 Continuité d'une fonction

10.1 Définitions

- **Définition 6** : Soit x_0 un point adhérent de D_f . La fonction f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- **remarque** : on a donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow$ $x_0 \in D_f$ **et** $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- Exemples :

- **Définition 7** : Soit x_0 un point adhérent de D_f .
  La fonction f est continue à droite en x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$.

  La fonction f est continue à gauche en x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$.

- Exemples :

- **Définition 8** : Une fonction f est continue sur l'intervalle ouvert]a ;b[si f est continue en x_0, pour tout $x_0 \in]a;b[$.
Une fonction f est continue sur l'intervalle fermé [a ;b] si f est continue sur]a ;b[et si f est continue à droite en a et à gauche en b .

10.2 Théorèmes

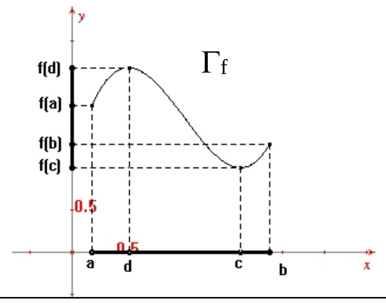
- **Théorème 15** : Si f et g sont continues en x_0, les fonctions f+g , λf , $f \cdot g$ et $\frac{f}{g}$ (si $g(x_0) \neq 0$) sont continues en x_0 .

- **Théorème 16** : Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

- **remarque** : Avec les théorèmes 14, 15 et 16 et les théorèmes sur les limites, on démontre que les fonctions polynômes, rationnelles, trigonométriques, racine n-ième sont continues sur leur domaine de définition.

- **Théorème 17** : Si f est continue sur l'intervalle [a ;b] , alors f ([a ;b]) est un intervalle fermé comprenant f(a) et f(b).

- **Corollaire du théorème 17** :Une fonction continue sur un intervalle fermé [a ;b] admet un maximum absolu et un minimum absolu sur cet intervalle.



- **Théorème 18** : **(de la valeur intermédiaire)**
Si f est continue sur l'intervalle [a ;b] , alors pour tout nombre y compris entre f(a) et f(b), il existe un nombre $c \in [a;b]$ tel que f(c) = y **.**

- **Corollaire du théorème 18** : Si f est continue sur l'intervalle [a ;b] et si f(a) et f(b) sont de signes contraires, alors il existe au moins un nombre $c \in]a;b[$ tel que f(c) = 0 .

- **Théorème 19** : Une fonction continue strictement croissante sur [a,b] est bijective dans [f(a); f(b)] .

- **Théorème 20** : La réciproque d'une fonction f continue et strictement croissante (resp. décroissante) dans un intervalle est une fonction f^{-1} continue et strictement croissante (resp. décroissante) dans l'intervalle correspondant.

Prolongement d'une fonction par continuité en un point :

- **Définition 9** : Lorsqu'une fonction f n'est pas définie en x_0, si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, on peut construire

une nouvelle fonction g ainsi : $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ et } x \neq x_0 \\ \text{ou} \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \text{ et } x = x_0 \end{cases}$

On appelle cette fonction g la prolongée par continuité de f en x_0 .