

La tour de Hanoï

Selon une légende très ancienne, il existe un temple où les moines sont chargés de veiller sur 64 disques sacrés. Les disques, qui sont tous de taille différente, forment une tour. Comme ils sont précieux et très fragiles, un disque ne peut être placé sur un disque plus petit. Hélas, le jour vient où quelques travaux dans le temple sont nécessaires et les disques doivent être déplacés. Ils sont très lourds et ne peuvent donc être transportés qu'un par un. De plus, il n'y a qu'un seul endroit assez sacré pour les stocker.

Les moines commencent donc à déplacer les disques de la tour d'origine vers la nouvelle place et l'endroit intermédiaire, gardant toujours chacune des trois piles en ordre (le disque le plus large en bas, le moins large en haut).

Alors qu'ils travaillent, les moines gardent en tête la terrible prophétie :

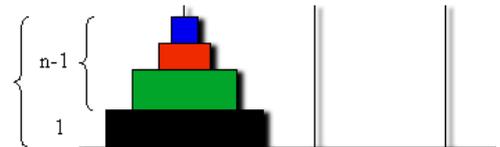
"Le temple s'écroulera avant que les disques soient mis en place." Qu'en pensez-vous?

Il existe un jeu basé sur cette légende. Le but du jeu est de bouger tous les disques de la pile de gauche vers un nouvel endroit en se servant de la position intermédiaire et en respectant les règles suivantes :

On ne peut déplacer qu'un disque à la fois.

On ne peut déplacer un disque qui se trouve sous un autre.

Un disque ne peut être déposé sur un disque plus petit.



Quel est le nombre minimum de déplacements nécessaires pour bouger une pile de n disques?

Bien sûr, si $n = 1$, un coup suffit! Si $n = 2$, c'est aussi assez facile :

On bouge le petit disque en position intermédiaire, puis le grand sur l'endroit final. Enfin, on pose le petit disque sur le grand. Finalement, on a déplacé la pile en 3 coups.

Et si n est plus grand ?

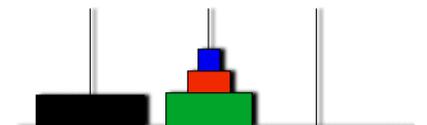
Commencer avec 3 disques afin de voir en combien de coups vous pouvez déplacer la pile. Quand vous penserez avoir trouvé le nombre de coups minimum, passez à 4 disques.

(Pour s'entraîner, visiter le site Internet : http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/jeux_mat/textes/jeu_hanoi.html)

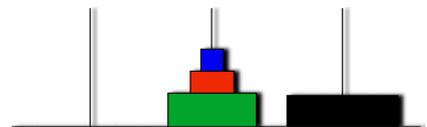
Démarche :

- 1) Désignons par u_n le nombre minimal de coups nécessaires pour déplacer une tour à n disques. On cherche à calculer u_n . Calculer u_1, u_2 .
- 2) Calculer u_n en fonction de u_{n-1} à l'aide des étapes suivantes :

Etape 1 : On déplace la tour de $(n-1)$ disques sur l'axe du milieu (en respectant les règles de base).



Etape 2 : On déplace le dernier disque de la tour sur le dernier axe.



Etape 3 : On déplace la tour de $(n-1)$ disques sur l'axe de droite (en respectant les règles de base).



- 3) Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5 .
- 4) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n + 1$. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. En déduire la valeur de v_n , puis de u_n en fonction de n .
- 5) Calculer le nombre de disques n nécessaires pour qu'un changement total de colonne demande au moins 500 coups.
- 6) Finalement : Est-ce que la prophétie se réalisera ? Sachant que les moines ont $n = 64$ disques à déplacer, qu'ils déplacent un disque par secondes, calculer le nombre de secondes nécessaires pour déplacer cette tour, le nombre d'années...Alors ?