

$$f_3(x) = \frac{2}{x^2+x+1} \quad \left| \begin{array}{l} \text{C.l.:} \\ x^2+x+1=0 \\ \Leftrightarrow \Delta=-3<0 \\ \text{et } x \in \emptyset \end{array} \right.$$

① Domaine: $D_{f_3} = \mathbb{R} - \{ \}$

② Parité: $\ast D_{f_3}$ symétrique

$\ast f_3$ ni paire ni impaire:

car $f_3(1) = \frac{2}{3}$ et $f_3(-1) = 2$

donc $f_3(1) \neq f_3(-1)$ et f_3 pas paire

et $f_3(-1) \neq -f_3(1)$ et f_3 pas impaire.

remarque: ...

③ Asymptotes: $\ast$ verticale: aucune car $D_{f_3} = \mathbb{R}$

$\ast$ aux infinis:

On a $f_3(x) = \frac{2}{x^2+x+1} = 0 + \frac{2}{x^2+x+1}$

donc $y=0$ as. horizontale pour $x \rightarrow \pm\infty$ div. euclidienne

④ Dérivée première:

$\ast f_3'(x) = \left(\frac{2}{x^2+x+1} \right)' = 2 \left(\frac{1}{x^2+x+1} \right)'$

$= 2 \cdot \frac{-(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} > 0$

$\ast f_3'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$\ast$ signes de $f_3'(x)$ sont ceux de $-(2x+1)$

$\ast$ $f_3'(x)$ $\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & -\frac{1}{2} & +\infty \\ \hline & + & 0 & - \end{array}$

⑤ Dérivée seconde: $f_3''(x) = \left(2 \frac{-(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \right)'$

$= (-2) \left(\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \right)'$

$= (-2) \frac{2(x^2+x+1)^2 - (2x+1) \cdot 2(x^2+x+1) \cdot (2x+1)}{(x^2+x+1)^4}$

$= (-2) \frac{2(x^2+x+1) [(x^2+x+1) - (2x+1)^2]}{(x^2+x+1)^4}$

$= (-4) \frac{(x^2+x+1)(x^2+x+1 - 4x^2 - 4x - 1)}{(x^2+x+1)^4}$

$= (-4) \frac{(x^2+x+1)(-3x^2-3x)}{(x^2+x+1)^4}$

$= (-4) \frac{(x^2+x+1) \cdot x(x+1)}{(x^2+x+1)^4} > 0$

$\ast f_3''(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2+x+1) \cdot x \cdot (x+1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, -1\}$

$\ast$ signes de $f_3''(x)$ sont ceux de $x(x+1) = x^2+x$

$f_3''(x)$ $\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & -1 & 0 & +\infty \\ \hline & + & 0 & - & + \end{array} \mathbb{R}$

⑥ Tableau des variations

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$	
$f'_3(x)$	+	+	0	-	-	
$f''_3(x)$	+	0	-	-	0	
$f_3(x)$	$y=0$ $\nearrow$ P.I. $\nearrow$ Max $\nwarrow$ P.I. $\nwarrow$ $y=0$ + - +					

⑦ Points particuliers:

* Intersection avec (OY) : $f_3(0) = 2$ donc $A(0, 2) \in \Gamma_{f_3}$

* Intersection avec (OX) : $f_3(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

* Maximum: $f_3(-\frac{1}{2}) = \frac{8}{3}$ donc $S(-\frac{1}{2}, \frac{8}{3})$

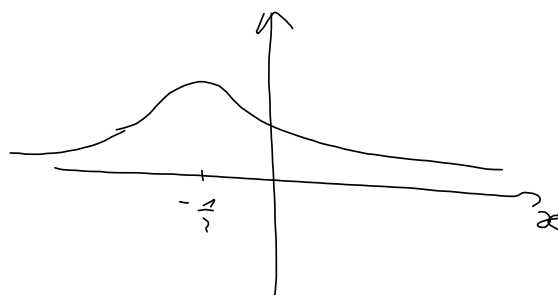
* Points d'inflexion: $f_3(-1) = 2$ donc $B(-1, 2) \in \Gamma_{f_3}$

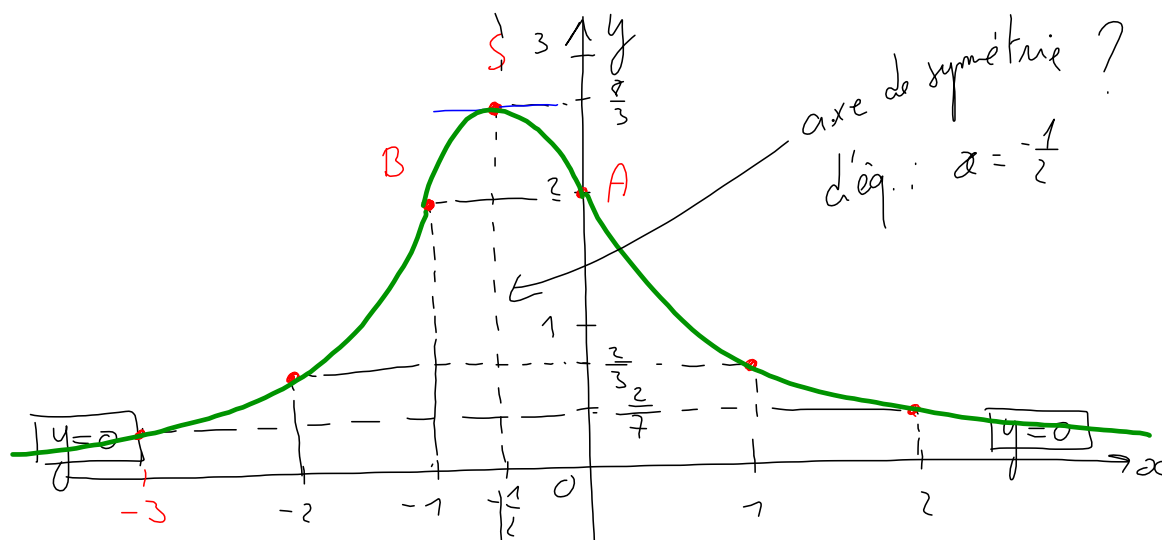
$f_3(0) = 2$ et A est un P.I.

⑧ Graphique de f_3 :

* format paysage

esquisse:





⑨ * Points supplémentaires :

x	-2	-3	1	2
$f_3(x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{7}$

* Le graphique admet

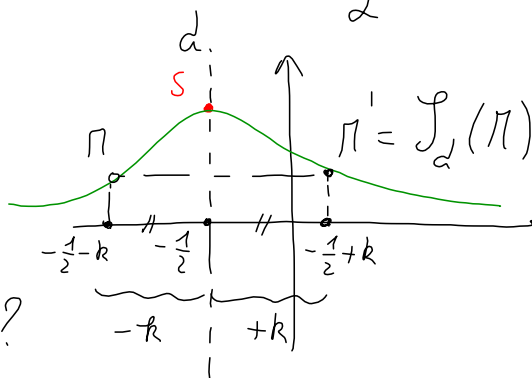
une symétrie axiale d'axe $x = -\frac{1}{2}$.

Deux méthodes :

1) algébrique :

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f_3\left(-\frac{1}{2}+k\right) = f_3\left(-\frac{1}{2}-k\right) ?$$

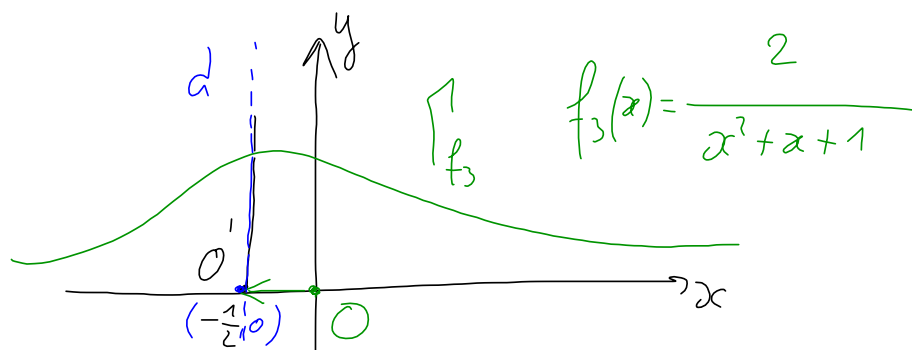


$$\text{On a : } f_3\left(-\frac{1}{2}+k\right) = \frac{2}{\left(-\frac{1}{2}+k\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}+k\right) + 1} = \frac{2}{\frac{1}{4} - k + k^2 - \frac{1}{2} + k + 1}$$

$$\text{et } f_3\left(-\frac{1}{2}-k\right) = \frac{2}{\left(-\frac{1}{2}-k\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}-k\right) + 1} = \frac{2}{k^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{4} + k + k^2 - \frac{1}{2} - k + 1} = \frac{2}{k^2 + \frac{3}{4}} = f_3\left(-\frac{1}{2}+k\right), \forall k$$

2) géométrie (analytique) :



d'où ici $O'(-\frac{1}{2}, 0)$ et $\begin{cases} x = X + (-\frac{1}{2}) \\ y = Y + 0 \end{cases}$

alors $y = f_3(x)$ devient $Y + 0 = f_3(X - \frac{1}{2})$

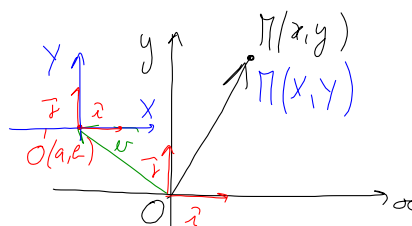
$$\Leftrightarrow Y = \frac{2}{(X - \frac{1}{2})^2 + (X - \frac{1}{2}) + 1} = \frac{2}{X^2 - \cancel{X} + \frac{1}{4} + \cancel{X} - \frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{X^2 + \frac{3}{4}}$$

On a bien $g(-X) = g(X), \forall X \in \mathbb{R} \quad = g(X)$

et g est paire et $\int_g = \int_{f_3}$ est symétrique p.rapport à $d(x = -\frac{1}{2})$

* formules analytiques de translation des axes
de coordonnées de vecteur $\vec{v}$:

Soit $O'(a, c)$
et $\vec{v} = \overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$



$$\text{On a : } \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{(Charles)}$$

$$= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + X \\ y = c + Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x - a \\ Y = y - c \end{cases}$$

Soit, ds le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})_2$ le graphique f_3
d'équation $y = f_3(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$

Soit un nouveau repère $(O'(\underline{a}, \underline{c}), \vec{i}', \vec{j}')$

$$\text{et } \begin{cases} x = X + (-\frac{1}{2}) \\ y = Y + 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où } y = f_3(x) \text{ devient : } Y + 0 = \frac{1}{(X - \frac{1}{2})^2 + (X - \frac{1}{2}) + 1}$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{1}{(X - \frac{1}{2})^2 + (X - \frac{1}{2}) + 1} = \frac{1}{X^2 - X + \frac{1}{4} + X - \frac{1}{2} + 1}$$

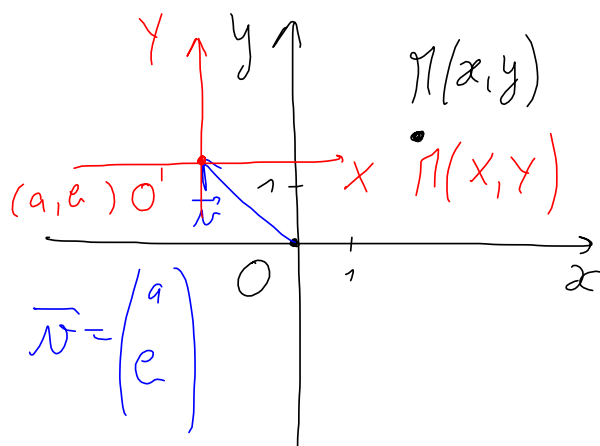
$$= \frac{1}{X^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{4X^2 + 3}$$

$$\Leftrightarrow Y = g(X) \text{ et } g \text{ est paire car}$$

$$g(-X) = \frac{4}{4(-X)^2 + 3} = g(X),$$

donc g est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $O_Y = d$. $\forall X \in \mathbb{R}$

* Formules analytiques de translation des axes :



On a :

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = x-a \\ Y = y-b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = X+a \\ y = Y+b \end{cases}$$