

fonction n°4: $y = f_4(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2}$

① Domaine: $D_{f_4} = \mathbb{R} - \{+1\}$ car $(x-1)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 1$

② Parité: D_{f_4} non symétrique car $1 \notin D_{f_4}$ et $(-1) \in D_{f_4}$
 donc f_4 n'admet aucune parité.

③ Asymptotes: * verticales: $\boxed{x = 1}$ car

$$\lim_{x \rightarrow 1} f_4(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2} = \frac{3}{0_+} = +\infty$$

* aux infinis: par division euclidienne:

$$f_4(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1} = 1 + \frac{4x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

car
$$\begin{array}{r} x^2 + 2x \quad | \quad x^2 - 2x + 1 \\ -x^2 + 2x - 1 \quad \text{①} \\ \hline 0 + (4x - 1) \quad \text{reste} \end{array}$$
 quotient

Ainsi $\boxed{y = 1}$ asymptote horizontale si $x \rightarrow \pm \infty$

④ Dérivée première :

$$f'_4(x) = \left(\frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(2x+2)(x-1)^2 - (x^2+2x) \cdot 2(x-1) \cdot 1}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{2(x-1) [(x+1)(x-1) - (x^2+2x)]}{(x-1)^4}$$

$$= 2 \cdot \frac{(x-1)(x^2-1-x^2-2x)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)(-2x-1)}{(x-1)^4} \quad (>0)$$

$$* f'_4(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(-2x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x=1} \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

* signes de $f'_4(x)$ sont ceux du numérateur :
 $(x-1)(-2x-1) = -2x^2 \dots$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$f'_4(x)$	$-$	0	$+$	$-$	$\rightarrow \mathbb{R}$

⑤ Dérivée seconde :

$$f''_4(x) = \left(f'_4(x) \right)' = \left(\frac{2 \cancel{(x-1)}(-2x-1)}{(x-1)^4} \right)'$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{-2x-1}{(x-1)^3} \right)' = 2 \cdot \frac{(-2)(x-1)^3 - (-2x-1) \cdot 3(x-1)^2 \cdot 1}{(x-1)^6}$$

$$= 2 \cdot \frac{\cancel{(x-1)} [-2(x-1) - (-2x-1) \cdot 3]}{(x-1)^4}$$

$$= 2 \cdot \frac{-2x+2+6x+3}{(x-1)^4} = \frac{2(4x+5)}{(x-1)^4} \quad (>0)$$

$$* f''_4(x) = 0 \Leftrightarrow 4x+5=0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$$

* signes de $f''_4(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$	$+\infty$	
$f''_4(x)$	$-$	0	$+$	$\rightarrow \mathbb{R}$

⑥ Tableau des variations

⑦

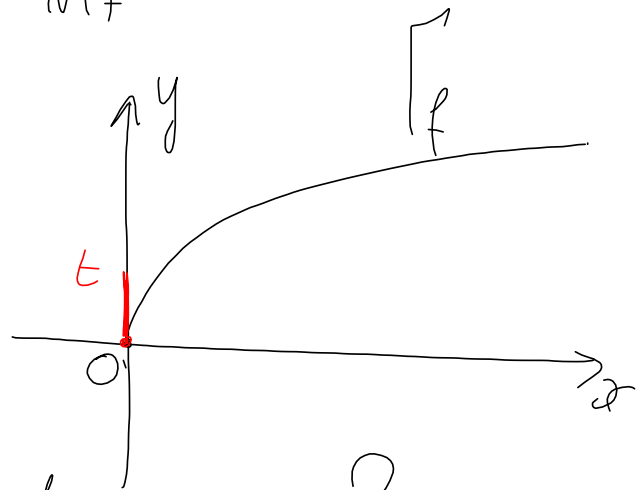
⑧

⑨

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{et}$$

$$\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}_+^*$$



$$\text{mais } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{0_+} = +\infty ?$$

(6) Tableau des variations de f_4 :

x	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'_4(x)$	-	-	0	+	-
$f''_4(x)$	-	0	+	+	+
$f_4(x)$	$y=1$			$+\infty$	$+\infty$

$y=1$ $\xrightarrow{\text{P.I.}}$ Min $\xrightarrow{+}$ $x=1$ $\xrightarrow{+}$ $y=1$

⑦ Points particuliers :

* Intersection avec (OY) : $f(0) = 0$ donc $O(0,0) \in \Gamma_f$

* Intersection avec (OX) : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0$
 $\Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, -2\}$

donc $A(-2, 0) \in \Gamma_f$

* Minimum : $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{3}$ donc $B(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) \in \Gamma_f$

* Point d'inflexion : $f(-\frac{5}{4}) = \frac{(-\frac{5}{4})^2 + 2(-\frac{5}{4})}{(-\frac{5}{4} - 1)^2}$
 $= \frac{\frac{25}{16} - \frac{5}{2}}{\frac{81}{16}} = \frac{25 - 40}{81} = \frac{-15}{81} \simeq -0,2$

* Intersection avec l'asymptote horizontale $\boxed{y=1}$:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x}{(x-1)^2} = 1$$

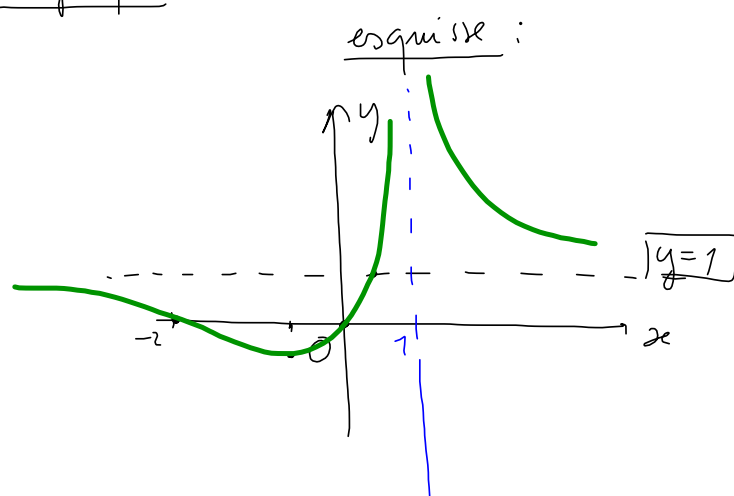
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x = (x-1)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2} + 2x = \cancel{x^2} - 2x + 1$$

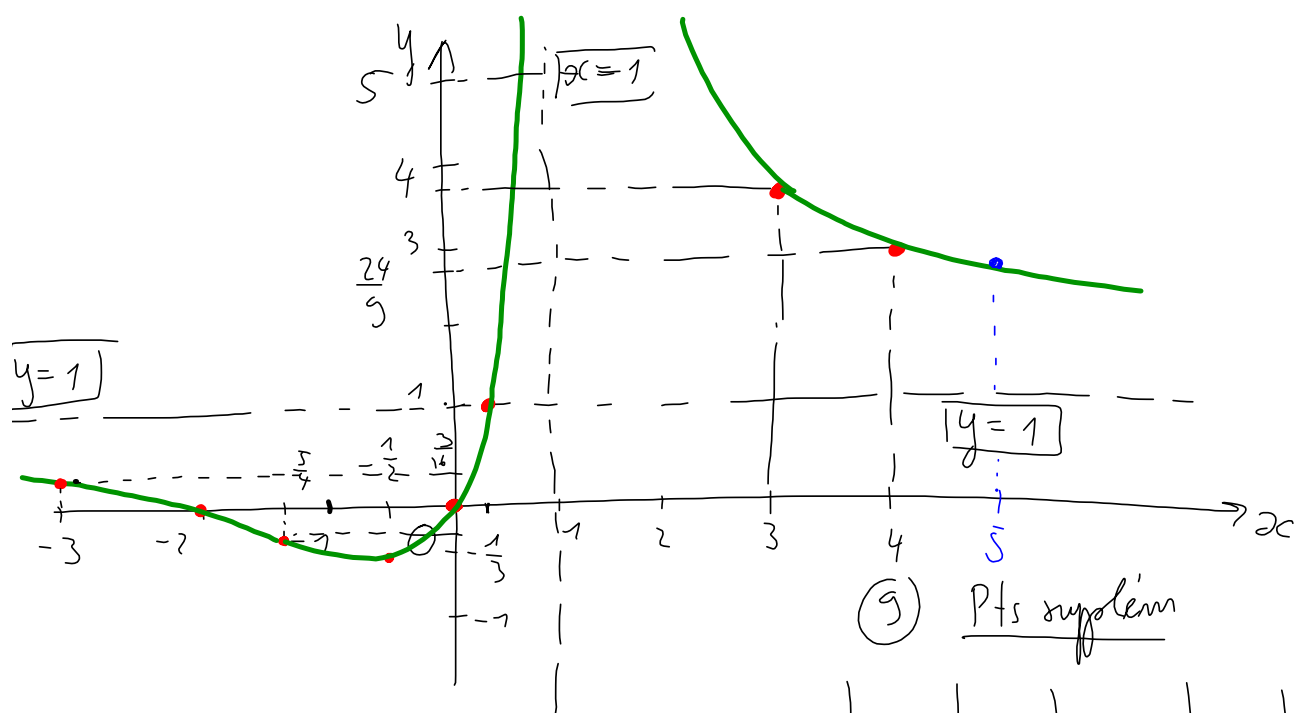
$$\Leftrightarrow 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

donc $C(\frac{1}{4}, 1) \in \Gamma_f \cap d$

où d est l'asymptote

⑧ Graphique :





(9) Pts supolém

x	-3	2	3	4
$f_4(x)$	$\frac{3}{16}$	8	$\frac{15}{4}$	$\frac{24}{9}$

⑨ Points supplémentaires

x	-3	2	3	4
$f_4(x)$	$\frac{3}{16}$	8	$\frac{15}{2}$	$\frac{24}{9}$

