

$$f_5(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

① Domaine: $D_{f_5} = \mathbb{R} - \{-2; +2\}$ car $x^2 - 4 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0$
 $\Leftrightarrow x \in \{-2; 2\}$

② Parité: D_{f_5} est symétrique
 et $f_5(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = \frac{-x^3}{x^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4} = -f_5(x)$

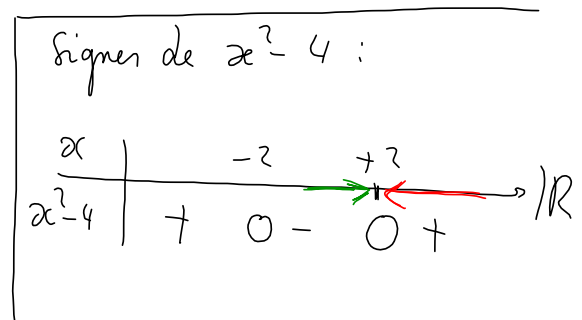
donc f_5 est impaire et $D_e = \mathbb{R}_+ - \{2\}$

③ asymptotes: * verticale:

$$\boxed{x = 2}$$

car $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f_5(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \frac{8}{0_+} = +\infty$

* rem: $\boxed{x = -2}$ est aussi une
 as. vert. par symétrie!



* asymptote $\bar{a} + \infty$:

$$f_5(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

$$= x + \frac{4x}{x^2 - 4}$$

$$\begin{array}{r} x^3 \quad | \quad x^2 - 4 \\ -x^3 + 4x \quad | \quad x \\ \hline 0 \quad 4x \end{array}$$

Donc $\boxed{y=x}$ est as. oblique si $x \rightarrow +\infty$
(aussi si $x \rightarrow -\infty$ par symétrie)

(4) Dérivée première:

$$f'_5(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-4} \right)' = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} \quad (\geq 0)$$

$$= \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2} \quad (\geq 0)$$

$$* f'_5(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-12) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pm \sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

* signes de $f'_5(x)$ sont ceux de (x^2-12) :

x	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$	0	$2\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'_5(x)$		+	0 - 0 - 0	+	

$$\mathcal{D}_e = \mathbb{R}_+ \setminus \{2\}$$

⑤ Dérivée seconde :

$$\begin{aligned}
 f_5''(x) &= \left(f_5'(x) \right)' = \left(\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2} \right)' = \left(\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2} \right)' \\
 &= \frac{(4x^3-24x)(x^2-4)^2 - (x^4-12x^2) \cdot 2 \cdot (x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4} \\
 &= \frac{4x(x^2-4) \left[(x^2-4)(x^2-4) - (x^4-12x^2) \right]}{(x^2-4)^4} = \frac{4x(x^2-4) (\cancel{x^4-10x^2+16} - \cancel{x^4+12x^2})}{(x^2-4)^4} \\
 &= \frac{4x(x^2-4) (2x^2+24)}{(x^2-4)^4} = \frac{8x \overbrace{(x^2-4)}^{\neq 0} \overbrace{(x^2+12)}^{\neq 0}}{(x^2-4)^4}
 \end{aligned}$$

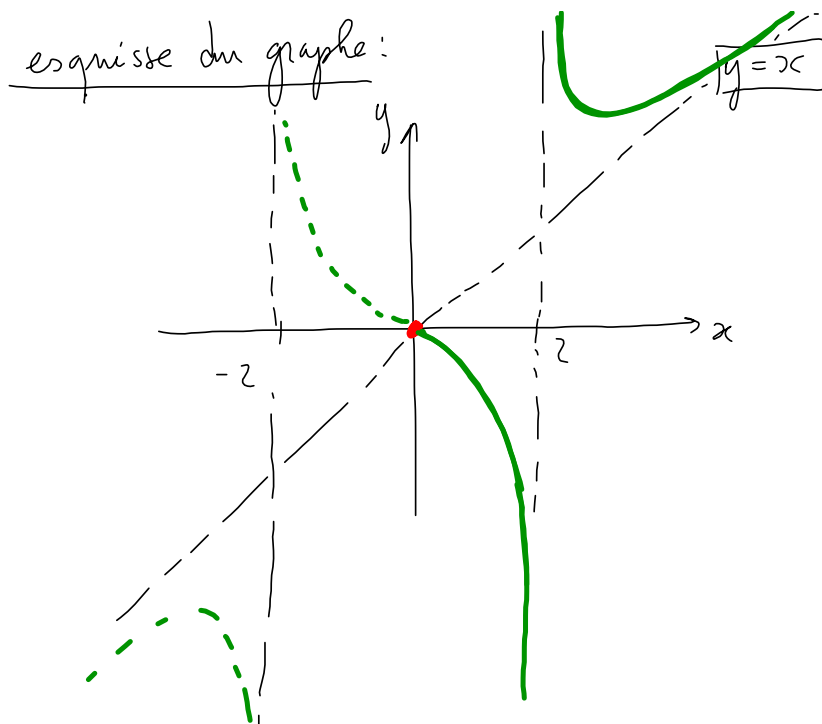
* $f_5''(x) = 0 \iff x = 0$
 * signes de $f_5''(x)$ sont, sur $D_e =]R_+ - \{2\}$, les signes de $(x^2 - 4)$:

* signes de $f_5''(x)$ sont, sur $D_e = [R_+ - \{2\})$, les signes de $(x-2)$.

x | $-\infty$ | -2 | 0 | 2 | $+\infty$
 $f_5''(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$
 des variations D_e

⑥ Tableau des variations

5



(7) Points particuliers :

* Intersection avec (OJ) : $f_5(0) = 0$ donc $O(0,0) \in \Gamma_{f_5}$

* Intersection avec (OI) : $f_5(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0$

* Minimum : $f_5(2\sqrt{3}) = \frac{(2\sqrt{3})^3}{(2\sqrt{3})^2 - 4} = \frac{12 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{12 - 4} = \frac{24\sqrt{3}}{8}$

(et $2\sqrt{3} \approx 3,5$)
 $= 3\sqrt{3} \approx 5,2$

* Intersection avec l'asymptote oblique : $\begin{cases} y = f_5(x) \\ y = x \end{cases} \Rightarrow f_5(x) = x$

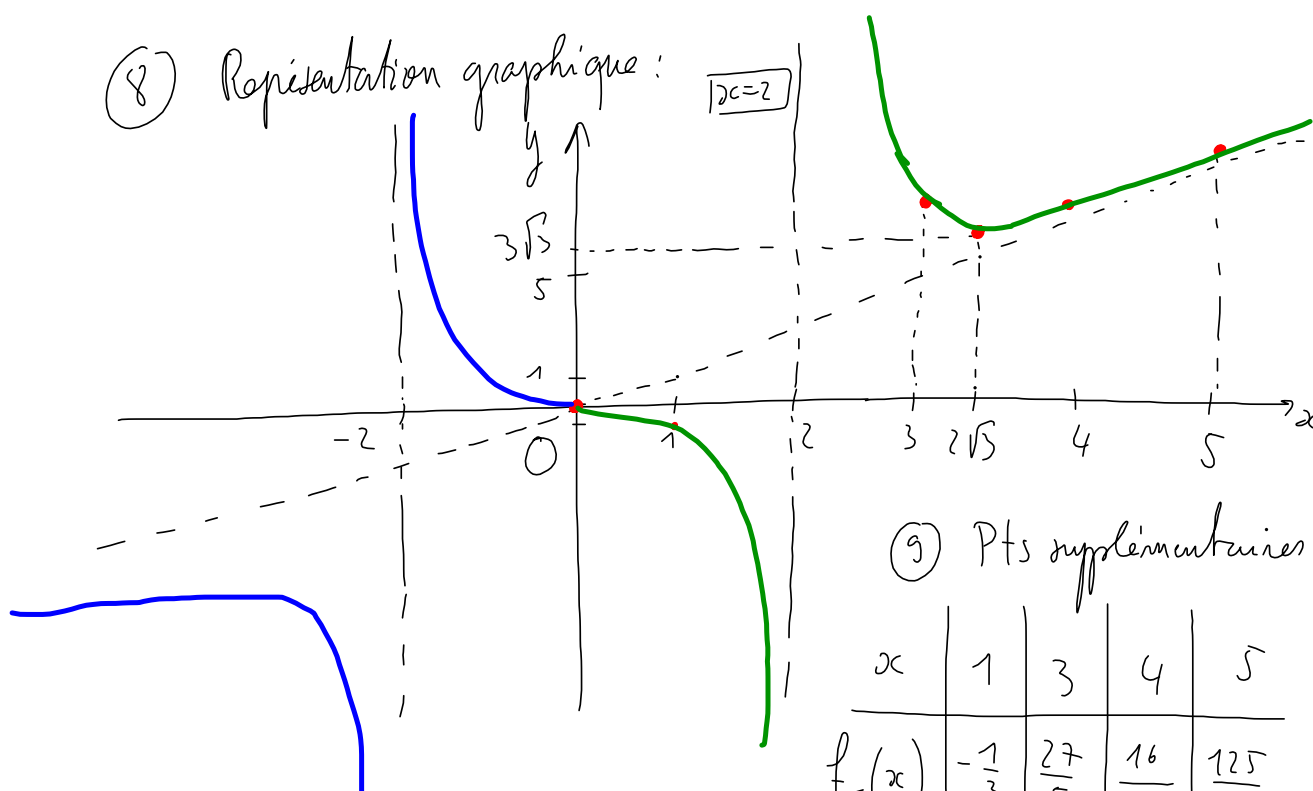
$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2 - 4} = x$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^3} = \cancel{x^3} - 4x$$

$$\Leftrightarrow 0 = -4x$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

(8) Représentation graphique :



(9) Pts supplémentaires

x	1	3	4	5
$f_5(x)$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{27}{5}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{125}{27}$

