

$$8) \quad f_8(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 4}$$

① Domaine: $D_{f_8} = \mathbb{R}$ - car $x^2 + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

② Parité: * D_{f_8} symétrique
* f_8 impaire? car

$$\begin{aligned} f_8(-x) &= -2x + \sqrt{(-x)^2 + 4} = -2x + \sqrt{x^2 + 4} \\ &\stackrel{?}{=} -f_8(x) = -\left(2x + \sqrt{x^2 + 4}\right) \\ &= -2x - \sqrt{x^2 + 4} \end{aligned}$$

Non... f_8 n'admet aucune parité - car :

$$f_8(1) = 2 + \sqrt{5} \quad \text{et} \quad f_8(-1) = -2 + \sqrt{5}$$

donc $f_8(1) \neq f_8(-1)$ et f n'est pas paire.

et $f_8(-1) \neq -f_8(1)$ et f n'est pas impaire.

③ Asymptotes: * verticale : aucune car $D_{f_8} = \mathbb{R}$

* asymptotes affines:

$$\underline{x \rightarrow +\infty}: m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_8(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 4}}{x}$$

$$= \left(\frac{+\infty + \infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x}$$

$$= 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{x} \quad \left(= \frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$= 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{1} = 2 - 1 = 1 = m$$

$$= 2 + 1 = 3 = m$$

Calcul de h :

$$\underline{a = -\infty}: h = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f_g(x) - \overset{m=1}{m}x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\underline{2x} + \sqrt{x^2 + 4} - \underline{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 4} \right) = (-\infty + \infty)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (x^2 + 4)}{x - \sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{x - \sqrt{x^2 + 4}}$$

$$= \frac{-4}{-\infty} = 0 = h \quad \text{et donc } \boxed{y = x} \text{ est asymptote de } x \rightarrow -\infty$$

de même $h = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f_g(x) - mx \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underline{2x} + \sqrt{x^2 + 4} - \underline{3x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4} - x \right) = (\infty - \infty)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} + 4 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \frac{4}{+\infty} = 0 = h$$

donc $\boxed{y = 3x}$ si $x \rightarrow +\infty$

④ Dérivée première:

$$* f'_8(x) = \left(\frac{2x + \sqrt{x^2 + 4}}{2\sqrt{x^2 + 4} + x} \right)' = 2 + \frac{\cancel{x}x}{\cancel{x}\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x^2 + 4} + x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$* f'_8(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + 4} + x = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2\sqrt{x^2 + 4}}_{>0} = \underbrace{-x}_{>0} \text{ et } x \in]-\infty, 0[$$

élévons au carré

$$\Leftrightarrow 4(x^2 + 4) = x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 16 - x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

* signes de $f'_8(x)$:

$$f'_8(x) = \frac{2\sqrt{x^2 + 4} + x}{\sqrt{x^2 + 4}} \quad (>0)$$

à résoudre: $f'_8(x) > 0$?

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + 4} + x > 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2\sqrt{x^2 + 4}}_{>0} > -x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, 0[\text{ et } \underbrace{2\sqrt{x^2 + 4}}_{>0} > \underbrace{-x}_{>0} \text{ et } 4(x^2 + 4) > x^2 \\ \text{ou} \\ x \in]0, +\infty[\text{ et } \underbrace{2\sqrt{x^2 + 4}}_{>0} > \underbrace{-x}_{<0} \text{ et } 3x^2 + 16 > 0 \text{ et } x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Autre méthode: $f'_8(x) = \frac{2\sqrt{x^2 + 4} + x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ et $\mathcal{D}_{f'_8} = \mathbb{R}$

On f'_8 et f'_8 est continue sur $\mathbb{R}$.

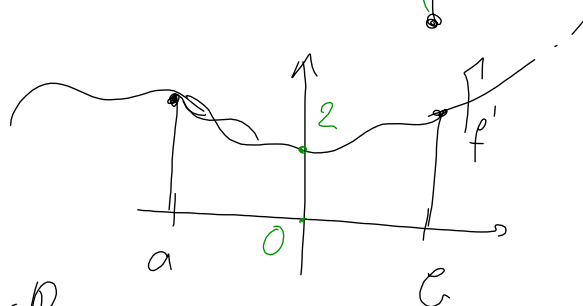
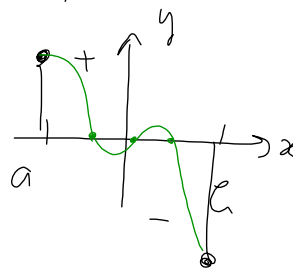
Or $f'_8(x) \neq 0$ donc, par un thm du cours (continuité),

$$f'_8(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ou } f'_8(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Soit } f'_8(0) = 2 > 0$$

$$\text{donc } f'_8(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$



(5) Dérivée seconde :

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left(\frac{2\sqrt{x^2+4} + x}{\sqrt{x^2+4}} \right)' = \left(2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \right)' \\
 &= 0 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \right)' = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+4} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{(x^2+4)} \\
 &= \frac{\cancel{x^2+4} - \cancel{x^2}}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} = \frac{4}{\underbrace{(x^2+4)}_{>0} \underbrace{\sqrt{x^2+4}}_{>0}} > 0, \forall x
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_g(x)$		+
$f''_g(x)$		+
$f_g(x)$		$y = 3x$

$y = x$

(7) Points particuliers:

- * Intersection avec l'axe (OI): $f(0) = 2$ donc $A(0, 2) \in \Gamma_f$
- * Intersection avec l'axe (OI): $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x + \sqrt{x^2 + 4} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{x^2 + 4}}_{\geq 0} = \underbrace{-2x}_{\geq 0} \text{ et } x \in \mathbb{R}_-$$

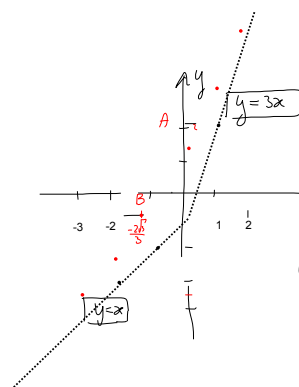
$$\Leftrightarrow x^2 + 4 = 4x^2$$

$$\Rightarrow 0 = 3x^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow 0 = 3x^2 - 4$$

donc $B(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0) \in \Gamma_{\theta} \left(\underline{\text{norm}}: \frac{-2\sqrt{3}}{3} \approx -1,15 \right)$

avec l'esquisse du grapho



"donc" il n'y a pas
d'intersection avec
les 2 asymptotes!
 $\rightarrow x$

⑨ Pts supplémentaires:

x	-3	-2	1	2
$f_1(x)$	$\sqrt{3}-6$ $\approx -2,4$	$\sqrt{2}-4$ $\approx -1,72$	$\sqrt{5}+2$ $\approx 4,23$	$2\sqrt{2}+4$ $\approx 6,83$

- * intersection avec les asymptotes

1) Sei $\begin{cases} y = f_g(x) \\ y = x \end{cases} \Rightarrow f_g(x) = x$

$$\Leftrightarrow 2x + \sqrt{x^2 + 4} = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+4}}{>0} = \frac{-x}{>0} \wedge x \in]-\infty, 0]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4 = x^2$$

$$\Leftrightarrow 0x^2 = 4 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$2) \begin{cases} y = f_1(x) \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x) = 3x \\ 2x + \sqrt{x^2 + 4} = 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x + \sqrt{x^2 + 4} = 3x$$

