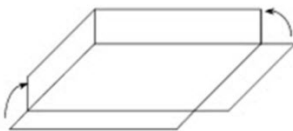


Exercice 7.1 :

On enlève un carré à chaque coin d'une pièce de carton rectangulaire de 22 cm x 18 cm et on relève ensuite les rectangles latéraux pour former une boîte sans couvercle. Quelle doit être la dimension des 4 carrés enlevés pour obtenir la boîte de volume maximale ?



7.1 : Données :

* constantes :

$$a = AB \quad \text{et} \quad a \leq b$$

$$b = BC$$

$$\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$$

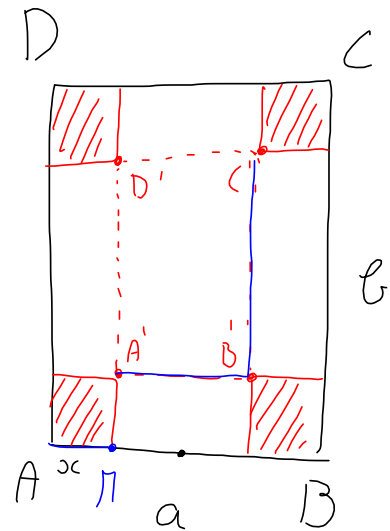
* fonction : volume de la boîte :

$$V = \text{base} \cdot \text{hauteur}$$

$$= \mathcal{V}(A'B'C'D') \cdot AM = A'B' \cdot B'C' \cdot AM$$

* la variable : $x = AM$ et $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$

* les paramètres : $y = A'B'$
 $z = B'C'$



* Résolution: on a : $V = x \cdot y \cdot z$
et il faut exprimer y et z en fonction
de la variable x et des constantes a et b ;

$$\text{On a : } \left. \begin{array}{l} y = A'B' = AB - 2 \cdot AM = a - 2x \\ z = B'C' = BC - 2 \cdot AM = b - 2x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(axiome} \\ \text{de la} \\ \text{distance)} \end{array}$$

$$\text{d'où : } V(x) = x \cdot y \cdot z = x(a - 2x) \cdot (b - 2x)$$

* Étude de la fonction V :

$$V(x) = x(a - 2x) \cdot (b - 2x)$$

1) Domaine de définition: $D_v = \left[0 ; \frac{a}{2}\right]$

2) Variations de v :

$$\begin{aligned}
 v'(x) &= \left[x \cdot (a-2x) \cdot (b-2x) \right]' \\
 &= 1 \cdot (a-2x) \cdot (b-2x) + x \cdot (-2) \cdot (b-2x) + x \cdot (a-2x) \cdot (-2) \\
 &= ab - 2ax - 2bx + 4x^2 - 2bx + 4x^2 - 2ax + 4x^2 \\
 &= 12x^2 - 4ax - 4abx + ab \\
 &= 12x^2 - 4(a+b)x + ab
 \end{aligned}$$

Étudions les signes de cette dérivée $v'(x)$:

$$\begin{aligned}
 v'(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \Delta' &= (-2(a+b))^2 - (12 \cdot ab) \\
 &= 4a^2 + 4b^2 + 8ab - 12ab \\
 &= 4a^2 + 4b^2 - 4ab \\
 &= 4(a^2 + b^2 - ab) \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{matrix} ?
 \end{aligned}
 \quad \left| \quad \begin{cases} m+m = -4a-4b ? \\ m \cdot m = 12ab \\ \Leftrightarrow m = \cancel{-6a} ? \\ m = \cancel{2b} \end{cases}$$

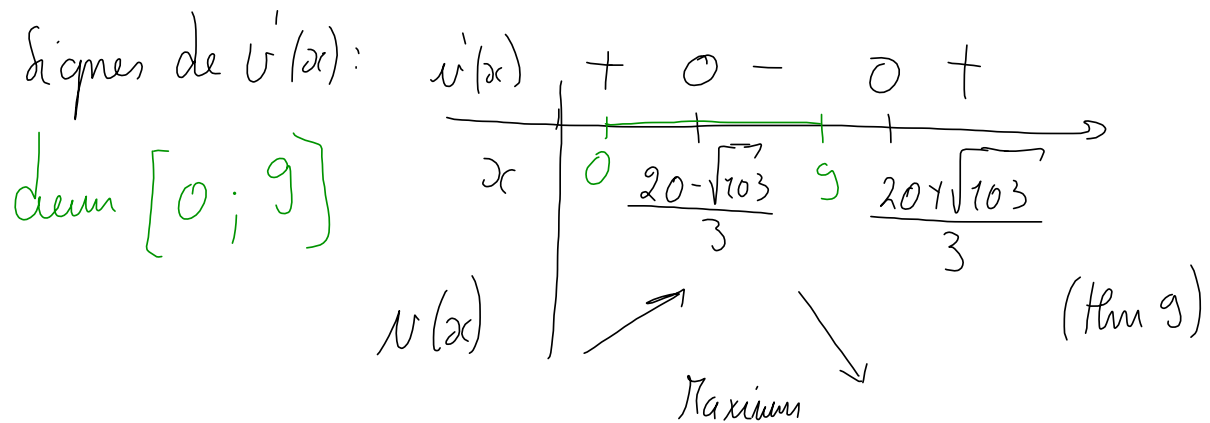
pour continuer, nous allons poser $a = 18$
 $b = 22$

$$\begin{aligned} \text{d'où } V(x) &= x(18-2x)(22-2x) = \\ &= 4 \cdot x(9-x)(11-x) \\ &= 4 \cdot x(x^2 - 20x + 99) \\ &= 4 \cdot (x^3 - 20x^2 + 99x) \end{aligned}$$

et $V'(x) = 12x^2 - 160x + 396$

Etude des signes et des zéros de $V'(x)$:

$$\begin{aligned} V'(x) = 0 &\Leftrightarrow 12x^2 - 160x + 396 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 40x + 99 = 0 \\ &\Leftrightarrow \Delta' = (-20)^2 - 3 \cdot 99 = 400 - 297 \\ &\quad = 103 \\ \text{et } x &= \frac{20 \pm \sqrt{103}}{3} \end{aligned}$$



Réponse: le volume de la boîte sera maximal en $x = \frac{20-\sqrt{103}}{3} \approx 3,28$ cm

et il vaut $v\left(\frac{20-\sqrt{103}}{3}\right) = \left(4 \cdot \left(x^3 - 20x^2 + 99x\right)\right)$

$$= 4 \left[\left(\frac{20-\sqrt{103}}{3}\right)^3 - 20 \left(\frac{20-\sqrt{103}}{3}\right)^2 + 99 \left(\frac{20-\sqrt{103}}{3}\right) \right]$$

$$= 579,36 \text{ cm}^3 = 0,58 \text{ dm}^3 = 0,58 \text{ litre}$$