**Exercice 7.10 :**

- a) Déterminer l'équation de la parabole.
 b) Pour quel point $P(x; y)$ de la parabole l'aire du rectangle grisé est-elle maximale ?
 $0 \leq x \leq 2$
 c) Calculer l'aire maximale du rectangle grisé.

a) Soit une parabole Γ_f d'équation: $y = ax^2 + bx + c$
 où a, b, c à calculer:

$$\left. \begin{array}{l} 1) A(2,5) \in \Gamma_f \\ 2) S(0,1) \in \Gamma_f \\ 3) A'(-2,5) \in \Gamma_f \\ \text{ou } 3) (0) \text{ axe de sym.} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 4a + 2b + c & (1) \\ 1 = 0 + 0 + c & \\ 5 = 4a - 2b + c & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 4 \\ c = 1 \\ 4a - 2b = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ 8a + 0 \cdot b = 8 : (1) + (2) \\ 4a - 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{d'où : } y = x^2 + 1$$

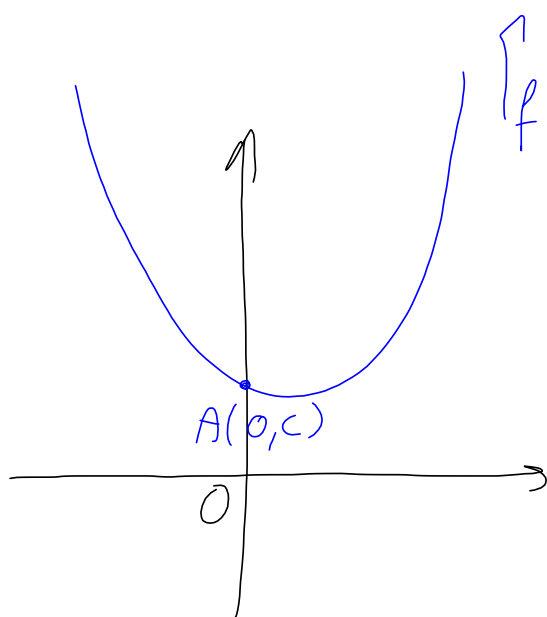
$$f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = a(-x)^2 + b(-x) + c, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{ax^2} + \cancel{bx} + \cancel{c} = \cancel{ax^2} - \cancel{bx} + \cancel{c}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2bx = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow b = 0$$



$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$\text{et } f(0) = c$$

B) $\left\{ \begin{array}{l} \text{constante : } \Gamma : y = x^2 + 1 \\ \text{variable : } x \text{ l'abscisse de } P, \\ \quad 0 \leq x \leq 2 \end{array} \right.$

C) $\left\{ \begin{array}{l} \text{fonction : aire du rectangle PQRS :} \\ \quad a = SR \cdot SP = z \cdot y \\ \text{paramètre : } y = SP \text{ et } z = SR \end{array} \right.$

* Résolution : exprimons z et y en fonction de x et de la parabole :

On a évidemment $y = SP = x^2 + 1$ car $P(x, y) \in \Gamma$

de plus $z = SR = OR - OS = 2 - x$

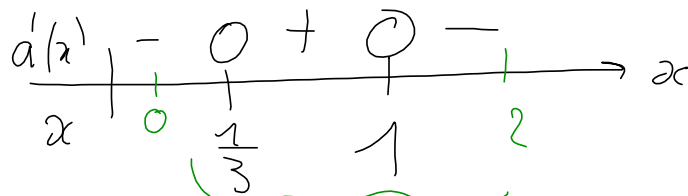
d'où $a = z \cdot y \Rightarrow a(x) = (2 - x)(x^2 + 1)$

* Etude de la fonction $a(x)$:

$$\begin{aligned} a'(x) &= (-1) \cdot (x^2 + 1) + (2 - x) \cdot 2x \\ &= -x^2 - 1 + 4x - 2x^2 \\ &= -3x^2 + 4x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \text{ Soit } a'(x) = 0 &\Leftrightarrow -3x^2 + 4x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 3x - x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x(x-1) - (x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(3x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \left\{ 1; \frac{1}{3} \right\} \end{aligned}$$

* Signes de $a'(x)$:



* Tableau

des variations:

x	0	$\frac{1}{3}$	<u>1</u>	2
$a'(x)$	-	0	+ 0	-
$a(x)$	$\xrightarrow{2}$		$\xrightarrow{2}$	
		$\nearrow$	$\searrow$	
		Min	Max	

Réponse:

Soit $a(0) = 2$

et $a(1) = 2$

donc 2 solutions
l'aire est maximale

en $x = 0$ et $x = 1$

et elle vaut alors $a(0) = a(1) = 2$ [u.a.]