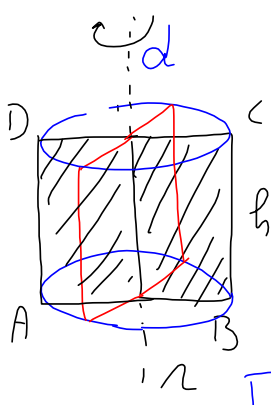


Exercice 7.14 : On fait tourner un rectangle de périmètre 60 cm autour de

l'un de ses axes de symétrie. Déterminer les dimensions du rectangle pour que le corps de révolution ainsi obtenu ait:

- a) le plus grand volume
- b) la plus grande aire latérale
- c) la plus grande aire totale

Données :



Constante : périmètre : $p \in \mathbb{R}_+^*$

fonction : a) volume du cylindre :

$$V = \text{Base} \cdot \text{hauteur} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

où $r = \frac{AB}{2}$ et $h = BC = AD$

variable : $x = r$
 $0 < x < \frac{p}{4}$

paramètre : $y = h$

$x = h$
 $0 < x < \frac{p}{2}$
 $y = r$

Résolution: On a évidemment $2x + y = \frac{P}{2}$

$$\Leftrightarrow y = \frac{P}{2} - 2x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(\frac{P}{2} - y)$$

Soit la fonction volume:

$$V = \text{base} \cdot \text{hauteur} = \pi r^2 \cdot h$$

$$\Rightarrow \boxed{V(x) = \pi \cdot x^2 \cdot \left(\frac{P}{2} - 2x\right)} \quad \text{ou} \quad \boxed{V(x) = \pi \cdot \left(\frac{P}{4} - \frac{x}{2}\right)^2 \cdot x}$$

avec $x = r$ avec $x = h$

* Etude de $V(x)$:

$$V'(x) = \left(\pi \cdot x^2 \cdot \left(\frac{P}{2} - 2x\right) \right)' =$$

$$= \pi \cdot \left(2x \left(\frac{P}{2} - 2x\right) + x^2 \cdot (-2) \right) =$$

$$= \pi (P \cdot x - 4x^2 - 2x^2) = \pi (-6x^2 + P \cdot x)$$

$$\text{et } V'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + P \cdot x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(-6x + P) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{P}{6}$$

les signes de $V'(x)$: $\begin{array}{c} - \quad 0 \quad + \quad 0 \quad - \\ x \quad 0 \quad \frac{P}{6} \quad \frac{P}{4} \end{array}$

* Tableau des variations:

x	0	$\frac{P}{6}$	$\frac{P}{4}$
$V'(x)$		+	-
$V(x)$		↗	↘

Réponse:

Le volume est maximal en $x = \frac{P}{6}$.

Il veut alors

$$V\left(\frac{P}{6}\right) = \pi \left(\frac{P}{6}\right)^2 \left(\frac{P}{2} - \frac{2P}{6}\right)$$

$$= \pi \cdot \frac{P^2}{36} \cdot \frac{P}{6} = \frac{\pi}{216} \cdot P^3 \quad [\text{u.v.}]$$

application num.:

Si $P = 60 \text{ cm}$

le volume est maximal en $x = r = \frac{AB}{2} = 10 \text{ cm}$

$$\text{et il veut } V(10) = \frac{\pi}{216} (60)^3 \simeq 3141,6 \text{ [cm}^3\text{]}$$

$$\simeq 3,14 \text{ [dm}^3\text{]}$$

La hauteur est alors: 10 cm $(= \pi \text{ [dm}^3\text{)])}$

2) aire latérale et totale :

constante : p [cm] : périmètre

variable : $x = \frac{AB}{2} = r$

$0 < x < \frac{p}{4}$ + 2 · aire disque

fonction : aire latérale : $a = \text{base} \cdot \text{hauteur}$

paramètre : $y = h$ totale $= 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi r^2$

Résolution : $a = 2\pi x \cdot y$ avec $y = \frac{p}{2} - 2x$

donc $a(x) = 2\pi x \left(\frac{p}{2} - 2x \right) + 2\pi x^2$

$= 2\pi x^2 + \pi x(p - 4x)$

$= \pi(2x^2 + px - 4x^2)$

d'où $a'(x) = \pi(p - 8x)$

et $a'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{p}{8}$

Tableau : $x \mid \frac{p}{8}$

$a'(x) \mid + \quad 0 \quad -$

$a(x) \mid \nearrow \quad \frac{p}{8} \quad \searrow$

Réponse :
L'aire latérale est maximale en $x = \frac{p}{8}$
Elle vaut alors

app. numérique : $a\left(\frac{p}{8}\right) = 2\pi \frac{p}{8} \left(\frac{p}{2} - 2 \cdot \frac{p}{8} \right)$

si $p = 60$ cm $= \pi \frac{p}{4} \left(\frac{p}{4} \right) = \pi \frac{p^2}{16}$ [u.a.]

alors $a_{\max} = \pi \cdot \frac{60^2}{16}$ [cm²] $\approx 706,9$ [cm²]

$\approx 7,07$ [dm²]

L'aire totale :

$a_t(x) = 2\pi x^2 + \pi x(p - 4x)$

alors : $a'_t(x) = 4\pi x + \pi \cdot [1 \cdot (p - 4x) + x \cdot (-4)]$

$= 4\pi x + \pi(p - 8x)$

$= 4\pi x + \pi p - 8\pi x$

$= \pi p - 4\pi x$

et $a'_t(x) = 0 \Leftrightarrow \pi p - 4\pi x = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi p}{4\pi} = \frac{p}{4}$

Tableau : $x \mid 0 \quad \frac{p}{4}$

$a'_t(x) \mid + \quad 0 \quad -$

$a_t(x) \mid \nearrow \quad \frac{p}{4} \quad \searrow$

Réponse : Il n'y a pas d'aire maximale, on a ici une fonction aire (totale) qui est strictement croissante sur $]0, \frac{p}{4}[$