

Exercice 7.3 : On veut clôturer un pâturage de forme rectangulaire devant avoir une superficie d'un kilomètre carré.

Le pâturage est borné par une route rectiligne sur l'un de ses côtés. Pour clôturer le long de la route, il en coûte 500.- fr. le km, clôturer les autres côtés revient à 300.- fr. le km. Quelles sont les dimensions du pâturage qui minimisent les coûts ?

* Données :

- * constante : 1 km^2
- * variable : $x = AD = BC$ et $0 < x$ (x en km)
- * fonction : coût :

$$C = 500 \cdot AD + 300 \cdot (AB + BC + CD)$$

$$= 500 \cdot x + 300 \cdot (y + x + y)$$
- * paramètre : $y = AB = CD$ [km]

Résolution : Soit l'aire est constante : $A = 1 \text{ km}^2$

$$= x \cdot y$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$$

donc $C = 500x + 300(x + 2y) \Rightarrow$

$$C(x) = 500x + 300\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

puis : $C'(x) = 500 + 300 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{-1}{x^2}\right)$

$$= 500 + 300 - \frac{600}{x^2}$$

$$= \frac{800x^2 - 600}{x^2} = \frac{200(4x^2 - 3)}{x^2}$$

zéros et signes de $C'(x)$:

$$x \ C'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (2x - \sqrt{3})(2x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

* signes : $c'(x)$ + 0 - 0 +

x $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 0 $+\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\rightarrow \mathbb{R}$ can $x > 0$

* Tableau :

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$C'(x)$	-	0 +	
$C(x)$			

Minimum

Réponse : le coût sera minimum en $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ [km]

et ce coût minimum est : $\simeq 0,877$ [km]

$$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 500 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 300 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) \text{ [Fr.]}$$

$$= 400\sqrt{3} + \frac{100 \cdot 4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 800\sqrt{3}$$

$$\simeq 1385,64 \text{ [Fr.]}$$