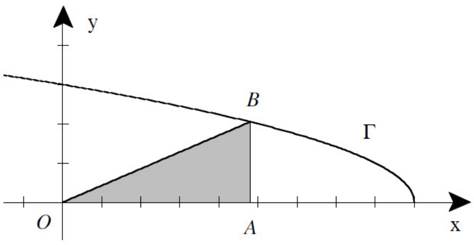
Exercice 7.4 : On considère le triangle rectangle OAB situé dans le premier quadrant dont le point B parcourt la courbe Γ d'équation $y = \sqrt{9 - x}$



Déterminer les coordonnées du point A pour que l'aire du triangle soit maximale.

Données :
* constante : la courbe $\Gamma : y = \sqrt{9-x}$
* la variable : x l'abscisse de $A : x = OA$
avec $0 \leq x \leq 9$
* la fonction : $aire = \frac{1}{2}\, base \cdot hauteur$
$= \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AB$
$= \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$
* paramètre : $y = AB$

Résolution : On a $B(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow y = \sqrt{9-x}$

donc $a = \frac{1}{2} x \cdot y \Rightarrow a(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{9-x}$

* Soit $a'(x) = \left(\frac{1}{2} x \sqrt{9-x}\right)' = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{9-x}\right)'$

$= \frac{1}{2}\left(1 \cdot \sqrt{9-x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{9-x}} \cdot (-1)\right)$

$= \frac{1}{2}\, \frac{2(9-x) - x}{2\sqrt{9-x}} = \frac{1}{4}\, \frac{18-3x}{\sqrt{9-x}}$

$= \frac{3}{4} \cdot \frac{6-x}{\sqrt{9-x}}$ (>0)

* On a : $a'(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - x = 0 \Leftrightarrow x = 6$

et signes :

$a'(x)$		+	0	−	//////
x			6		9

* Tableau :

x	0		6		9
$a'(x)$		+	0	−	
(Thm 9-10) $a(x)$		↗	Maximum	↘	

* Réponse : L'aire est maximale en $x = 6$

et elle vaut alors $a(6) = \frac{1}{2} \cdot 6 \sqrt{9-6} = 3\sqrt{3}$ [u.a]

$\Leftrightarrow a(6) \simeq 5{,}19$ [u.a.]