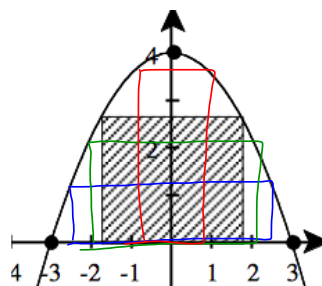


Problème d'optimisation : 7.5

Exercice 7.5 : Soit la parabole de sommet $S(0; 4)$. Le rectangle hachuré a une aire maximale.

Quelles sont ses dimensions ?



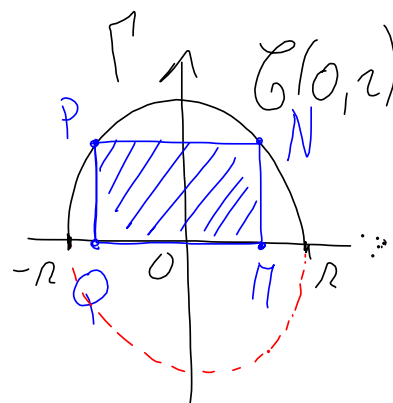
7.5 (e) Si Γ est un arc de cercle :

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\text{car } \mathcal{C}(0, r) : x^2 + y^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = r^2 - x^2$$

$$\Leftrightarrow y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

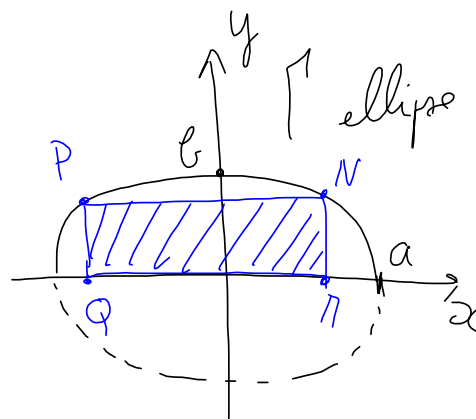


7.5 (c)

$$\Gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$$

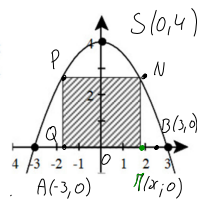
$$\Leftrightarrow y^2 = c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$



Exercice 7.5 : Soit la parabole de sommet $S(0; 4)$. Le rectangle hachuré a une aire maximale.

Quelles sont ses dimensions ?



Données : * constante : la parabole :

$$y = ax^2 + bx + c$$

(où a, b, c sont à calculer)

* la variable : $x = OP$ où $P(x; 0) \in (OI)$

$$\text{et } 0 \leq x \leq 3$$

* la fonction : $a = \mathcal{V}(PNPQ) = \text{base} \cdot \text{hauteur}$

$$= QM \cdot MN = 2x \cdot y$$

* paramètre : $y = PN = PQ$

Résolution : 1) Calcul de a, b et c :

$$\text{parabole } \Gamma : y = ax^2 + bx + c$$

$$\text{et } \begin{cases} S(0, 4) \in \Gamma \Leftrightarrow 4 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \\ A(-3; 0) \in \Gamma \Leftrightarrow 0 = 9a - 3b + c \\ B(3; 0) \in \Gamma \Leftrightarrow 0 = 9a + 3b + c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow c = 4 \text{ et } b = 0 \text{ et } a = -\frac{4}{9}$$

$$\text{Donc } N(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow y = -\frac{4}{9}x^2 + 4$$

$$\text{et l'aire } a = 2x \cdot y$$

$$\Rightarrow a(x) = 2x \cdot \left(-\frac{4}{9}x^2 + 4\right) = 2\left(-\frac{4}{9}x^3 + 4x\right)$$

$$\text{De plus } a'(x) = 2 \cdot \left[-\frac{4}{9}x^3 + 4x\right]'$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}x^2 + 4\right) = \frac{8}{3}(-x^2 + 3)$$

$$\text{et } a'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$$

$$\text{et signes de } a'(x): \begin{array}{c} a'(x) \quad - \quad 0 \quad + \quad 0 \quad - \\ x \quad - \quad \sqrt{3} \quad 0 \quad \sqrt{3} \quad 3 \end{array} \rightarrow \mathbb{R}$$

Tableau des variations :

x	0	$\sqrt{3}$	3
$a'(x)$		+	0 -
$a(x)$		↗	↘

maximum

Réponse : L'aire est maximale en $x = \sqrt{3}$
et vaut $a(\sqrt{3}) = 2\left(\sqrt{3}\right)\left(-\frac{4}{9}(\sqrt{3})^2 + 4\right)$

$$= 2\sqrt{3}\left(-\frac{4}{3} + \frac{12}{3}\right) = 2\sqrt{3} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

[m.a.]

$$\text{ici } M = \frac{8}{3}, x = \sqrt{3} \gg$$