Exercice 7.7 : Trouver les points de la courbe $y = x^2 - 9$ dont la distance à l'origine est minimale.

Données:
- constante : $\Gamma : y = x^2 - 9$
- variable : x : l'abscisse de $M \in \Gamma$, $x \in \mathbb{R}$
- fonction : distance : $d = OM = \|\overrightarrow{OM}\|$ avec $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- paramètre : y : ordonnée du point M

Résolution: On a "évidemment" :

$$M(x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow y = x^2 - 9$$

d'où $d = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\Longrightarrow d(x) = \sqrt{x^2 + (x^2-9)^2} = \sqrt{x^4 - 17x^2 + 81}$$

* Etude de cette fonction:

* On a : $d'(x) = \dfrac{4x^3 - 34x}{2\sqrt{x^4-17x^2+81}} = \dfrac{x(2x^2-17)}{\sqrt{x^4-17x^2+81}}$

* zéros de $d'(x)$: $d'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2x^2-17) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $(2x^2-17) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $(\sqrt{2}x - \sqrt{17})(\sqrt{2}x + \sqrt{17}) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{\frac{17}{2}}$

* signes de $d'(x)$: tableau des signes :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{17}{2}}$		0		$+\sqrt{\frac{17}{2}}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2-17$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$d'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

* Tableau des variation de $d(x)$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{17}{2}}$		0		$+\sqrt{\frac{17}{2}}$		$+\infty$
$d'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$d(x)$		↘	Min	↗	Max	↘	Min	↗	

* Réponse: La distance OM est minimale en $x = \pm\sqrt{\frac{17}{2}}$ $(\simeq \pm 2{,}92)$

et elle vaut alors : $d\left(\pm\sqrt{\frac{17}{2}}\right) = \sqrt{\cancel{x}^4 - 17\cancel{x}^2 + 81}$

$= \sqrt{\left(\pm\sqrt{\frac{17}{2}}\right)^4 - 17\left(\pm\sqrt{\frac{17}{2}}\right)^2 + 81}$

$= \sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2 - 17\cdot\frac{17}{2} + 81} = \sqrt{\underbrace{\frac{17^2}{4} - \frac{17^2}{2}} + 81} = \sqrt{17^2\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{81\cdot 4}{4}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{81\cdot 4 - 17^2} = \frac{1}{2}\sqrt{18^2 - 17^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{(18-17)}_{1}\underbrace{(18+17)}_{35}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{35}$ [u.l.] $\simeq 2{,}96$ [u.l.]