

Exercice 7.8 : Déterminer, pour un volume donné de $V = 1.75 \text{ dm}^3$, les dimensions de la boîte cylindrique qui utilise le minimum de matière première.

Données : * constante : volume $V = a \text{ [dm}^3\text{]}$

* fonction : aire /

$$A_t = 2 \cdot \text{base} + \text{rectangle}$$

$$= 2 \cdot (\pi r^2) + 2\pi r \cdot h$$

où $r = AB$

$h = BC$

* variable :

$$x = r$$

$$0 < x$$

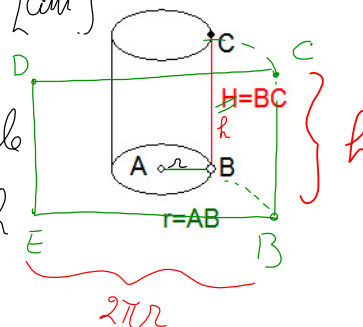
* paramètre :

$$y = h$$

$$x = h$$

$$0 < x$$

$$y = r$$



Résolution : On a un volume fixe :

$$V = a = \text{base} \cdot \text{hauteur} = \pi r^2 \cdot h$$

$$\Leftrightarrow a = \pi r^2 h$$

avec $x = r$

$$y = h$$

On a : $a = \pi \cdot x^2 \cdot y$

$$\Leftrightarrow y = \frac{a}{\pi x^2}$$

$$x = h$$

$$y = r$$

On a : $a = \pi y^2 \cdot x$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{a}{\pi \cdot x} \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{a}{\pi x}}$$

d'où $A_t = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$

$$\Rightarrow A_t(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot \frac{a}{\pi x^2} \Rightarrow A_t(x) = 2\pi \cdot \frac{a}{\pi x} + 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a}{\pi x}} \cdot x$$

$$\Rightarrow A_t(x) = \frac{2(\pi x^3 + a)}{x} \left| \begin{aligned} &= 2 \left(\frac{a}{x} + \pi \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\pi x}} \cdot \sqrt{\pi x} \cdot x \right) \\ &= 2 \left(\frac{a}{x} + \sqrt{a \pi x} \right) \end{aligned} \right.$$

* Etude de $A_t(x)$:

$$A_t(x) = \frac{2(\pi x^3 + a)}{2}$$

$$\text{et } A'_z(x) = 0 \Leftrightarrow 2\pi x^3 - a = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{a}{2\pi} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$$

Converse: $f'_+(x) > 0$

$$(1) \quad x^3 > \frac{a}{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow x > \sqrt[3]{\frac{9}{2\pi}}$$

réponse :

A_t est minimale

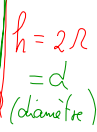
en $\lambda = \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$

On a: $x = R = \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$

et $y = h = \frac{a}{\pi x^2}$

$$\frac{\pi x^2}{a} = \frac{\pi \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}} = \frac{\cancel{a} \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}}{\cancel{\pi} \cdot \cancel{a} \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}}$$

$$= 2 \sqrt[3]{\frac{9}{2\pi}} = 2.12$$



↓ mm came:
 $d = h$