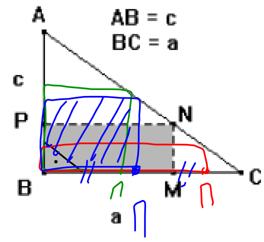
Exercice 1 : Soit un triangle ΔABC rectangle en B avec AB = c et BC = a .
M est un point quelconque du segment]BC[, $N = p_{(AB)}(M) \in (AC)$ et $P = p_{(BC)}(N) \in (AB)$. Le quadrilatère MNPB ainsi construit est un rectangle .
Etudier les variations du périmètre et de l'aire du rectangle BMNP.



Données :
* constantes : ΔABC et $a = BC$ et $c = AB$
* variable : $x = BM$ et $0 < x < a$
* fonctions : périmètre et aire du rectangle BMNP :

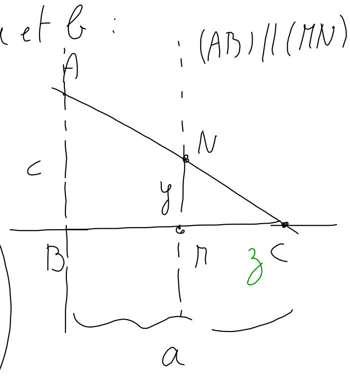
$$p = 2 \cdot (BM + MN) = 2(x + y)$$

$$a = BM \cdot MN = x \cdot y$$

* paramètre : $y = MN$

Résolution : Exprimer y en fonction de x et des constantes a et b :

① avec le thm de Thalès (les triangles semblables)



$$\frac{AB}{NM} = \frac{BC}{MC} = \frac{CA}{CN} \quad \left(\frac{\Delta ABC}{\Delta NMC}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{y} = \frac{a}{z} \left(= \frac{?}{?}\right)$$ où $z = a - x$

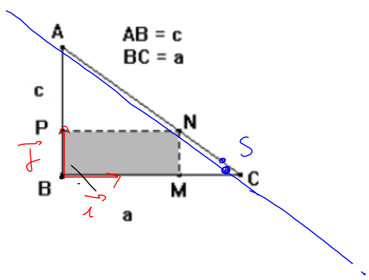
car $MC = BC - BM$ (axiome de la distance)

$$\Leftrightarrow y = \frac{c}{a}(a - x)$$

② par la géométrie analytique :

Soit le repère R.O.N $(B, \vec{i}, \vec{j})$

avec $\vec{i}$ colin. avec $\overrightarrow{BC}$
$\vec{j}$ colin. avec $\overrightarrow{BA}$



On a alors : $B(0,0)$, $C(a,0)$, $A(0,c)$
$M(x,0)$, $N(x,y)$ et $P(0\,;y)$

et $N \in (AC) \Longleftrightarrow y = \frac{c}{a}(a-x)$ car :

équation de la droite (AC) avec $C(a,0)$ et $A(0,c)$

$S(x,y) \in (AC) \Longleftrightarrow \overrightarrow{CS}$ et $\overrightarrow{CA}$ colin.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-a & -a \\ y-0 & c \end{vmatrix} = 0$$ où $\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} x-a \\ y-0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 0-a \\ c-0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow c(x-a) + ay = 0$$

$$\Leftrightarrow -ay = c(x-a) \Leftrightarrow y = \frac{c}{-a}(x-a)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{c}{a}(a-x)$$

Ainsi $p = 2(x+y)$ et $a = x \cdot y$

d'où les fonctions suivantes :

$$p(x) = 2\left(x + \frac{c}{a}(a-x)\right) = 2\left(x + c - \frac{c}{a}x\right) = 2\left(\left(1-\frac{c}{a}\right)x + c\right)$$

et

$$a(x) = x \cdot \frac{c}{a}(a-x) = \frac{c}{a}\,x(a-x) = \frac{c}{a}\left(ax - x^2\right)$$

* Etude de ces deux fonctions :

$$p'(x) = 2\left(1 - \frac{c}{a}\right) = 2 \cdot \frac{a-c}{a}$$

la dérivée est une constante du signe de $(a-c)$:

si $a > c$: $p'(x) > 0$ et p est une fct. croissante

si $a < c$: $p'(x) < 0$ et p est une fct. décroissante

$$a'(x) = \frac{c}{a}(a - 2x)$$

$$a'(x) = 0 \iff a - 2x = 0 \iff x = \frac{a}{2}$$

* Tableau pour les variations de $a(x)$:

x	0		$\frac{a}{2}$		a
$a'(x)$		$+$	0	$-$	
$a(x)$	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	0

L'aire est maximale en $x = \frac{a}{2}$ (M milieu de $[B,C]$)

et elle vaut alors $a\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{c}{a}\left(a \cdot \frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)$

$$= \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{c}{a}\,\frac{a^2}{4} = \frac{ac}{4} \quad [u.a.]$$

(remarque : l'aire maximale est la moitié de l'aire du triangle ΔABC) $= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{1}{2}ac}_{\sigma(\Delta ABC)}\right)$