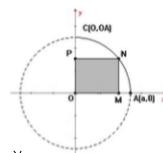


Exercice 2: Soit un R.O.N. $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle $\mathcal{C}(O, OA)$, $A(a, 0)$ et $a > 0$.
 M est un point du segment $]O, A[$.
 Etudier les variations de l'aire du rectangle $OMNP$, où N est le point du cercle $\mathcal{C}$ tel que $(MN) \parallel (OJ)$ et $P = P_{(OA)}(N) \in (OJ)$.



Données: $\begin{cases} \text{constante(s)}: \mathcal{C}(O, a) \text{ et } a \in \mathbb{R}^* \\ \text{variable: } x \text{ avec } M(x, 0) \in]O, A[\\ \text{fonction: } \begin{matrix} 0 < x < a \\ \text{aire du rectangle } OMNP \\ A = OM \cdot MN = x \cdot y \end{matrix} \\ \text{paramètre: } y = MN \end{cases}$

Résolution: Exprimer y en fonction de x et de a :

$$\text{Equation du cercle } \mathcal{C}(O, a): x^2 + y^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\text{d'où } A = x \cdot y \text{ donne } A(x) = x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

Etude de cette fonction:

$$\begin{aligned} x \quad A'(x) &= 1 \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &= \frac{a^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \quad A'(x) = 0 &\Leftrightarrow a^2 - 2x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{2}x - a)(\sqrt{2}x + a) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}} \right\} \quad \left(\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \right) \end{aligned}$$

x signes de $A'(x)$: $A'(x)$ $\begin{matrix} - & 0 & + & 0 & - \\ \hline x & -\frac{a}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{2}} & a \end{matrix}$

x Tableau des variations

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	a
$A'(x)$		+	0 -
$A(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

remarque: si $x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$
 alors $y = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

Reponse: L'aire est maximale en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

et vaut alors:

$$\begin{aligned} i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}a \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}a^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{1}{2}a^2 \text{ [u.a.]} \end{aligned}$$

: le rectangle d'aire maximale est un carré

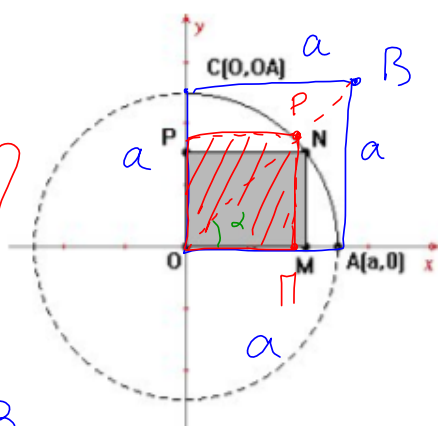
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$\eta \in]0, \pi[?$$

$$\angle \alpha = \angle AOB$$

$$\text{et } \alpha = 45^\circ$$

$$\text{or } \cos(\alpha) = \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$\frac{1}{2} a^2$: la
moitié du
carré de
côté a