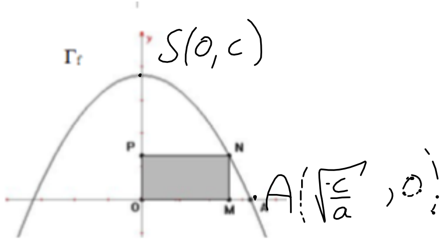
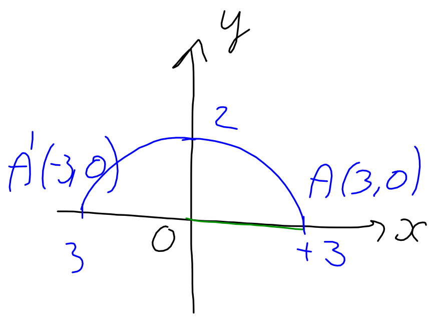
Exercice 3: Soit un R.O.N. $\mathcal{R} = (O\ ,\ \vec{\ }\ \vec{\ })$, le graphique Γ_f de la fonction f définie par $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, et $a < 0$, $c > 0$ et $b = 0$.
M est un point du segment]O,A[et $A \in \Gamma_f \cap [O,I)$.
Etudier les variations de l'aire du rectangle OMNP, où N est le point du graphique Γ_f tel que (MN) // (OJ) et $P = p_{(OA)}(N) \in (OJ)$.



Exercice 4: Soit un R.O.N. $\mathcal{R} = (O\ ,\ \vec{i}\ \vec{j}\ )$ et la fonction f définie par $y = f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$.
M est un point du segment]O,A[et $A \in \Gamma_f \cap [O,I)$. où $A(3\ ;\ 0)$
Etudier les variations de l'aire du rectangle OMNP, où N est le point du graphique Γ_f tel que (MN) // (OJ) et $P = p_{(OA)}(N) \in (OJ)$.



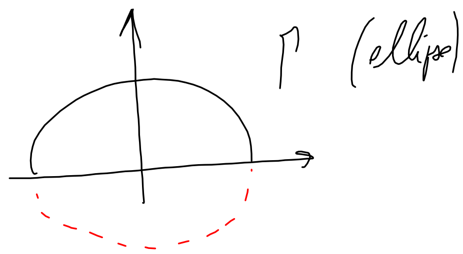
$\Gamma: \quad y = \pm \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$

$\Rightarrow \quad y^2 = \frac{4}{9}(9-x^2)$

$\Leftrightarrow \quad 9y^2 = 36 - 4x^2$

$\Leftrightarrow \quad 4x^2 + 9y^2 = 36 \iff \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

ellipse



<u>Résolution :</u> calculer y en fonction de x et des constantes (Γ)

$$y = f(x)$$ dans les 2 cas.

dans exe 3 : $y = ax^2 + c$ avec $c > 0$ et $a < 0$

dans exe 4 : $y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$

où $y = ax^2 + c = 0 \iff x^2 = -\frac{c}{a}$ (> 0)

$\iff x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

Données : (3 − 4)

constante : $\Gamma : y = f(x)$

variable : x où $M(x, 0)$ et

③ $0 \leq x \leq \sqrt{\frac{-c}{a}}$ ④ $0 \leq x \leq 3$

fonction : aire du rectangle :

$$A = OM \cdot MN$$
$$= x \cdot y$$

paramètre : $y = MN$

exe 3

$$A(x) = x\cdot(ax^2+c) = ax^3 + c\cdot x$$

On a :

$$A'(x) = 3ax^2 + c$$

et $A'(x) = 0 \iff 3ax^2 + c = 0 \iff x^2 = \frac{-c}{3a}$ (>0)

$$\iff x = \pm\sqrt{\frac{-c}{3a}}$$

Signes :

$A'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
x		$-\sqrt{\frac{-c}{3a}}$	0	$+\sqrt{\frac{-c}{3a}}$		$\sqrt{\frac{-c}{a}}$ $\mathbb{R}$

Tableau des variations :

x	0	$\sqrt{\frac{-c}{3a}}$	$\sqrt{\frac{-c}{a}}$
$A'(x)$	$+$	0	$-$
$A(x)$	↗	Max	↘

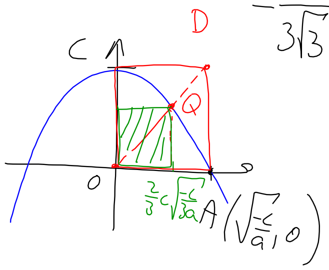
Réponse : L'aire est maximale en $x = \sqrt{\frac{-c}{3a}}$ et elle vaut

$$A\left(\sqrt{\frac{-c}{3a}}\right) = a\left(\sqrt{\frac{-c}{3a}}\right)^3 + c\left(\sqrt{\frac{-c}{3a}}\right)$$

$$= \cancel{a}\sqrt{\frac{-c}{3a}}\cdot\frac{-c}{3\cancel{a}} + c\sqrt{\frac{-c}{3a}}$$

$$= \sqrt{\frac{-c}{3a}}\left(\frac{-c}{3}+c\right) = \frac{2}{3}c\sqrt{\frac{-c}{3a}}$$

$$= \frac{2c}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{-c}{a}}$$



?

exe 4

$$A(x) = x\cdot\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$$

$$A'(x) = \frac{2}{3}\left(x\cdot\sqrt{9-x^2}\right)'$$

$$= \frac{2}{3}\left[1\cdot\sqrt{9-x^2} + x\cdot\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{9-x^2}}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}} \quad >0$$

$A'(x) = 0 \iff$

$$9 - 2x^2 = 0$$

$$\iff (3-\sqrt{2}x)(3+\sqrt{2}x) = 0$$

$$\iff x \in \left\{-\frac{3}{\sqrt{2}}\,;\,+\frac{3}{\sqrt{2}}\right\}$$

Signes :

$A'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
x		$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0	$+\frac{3\sqrt{2}}{2}$		3 $\mathbb{R}$

$]0,3[$

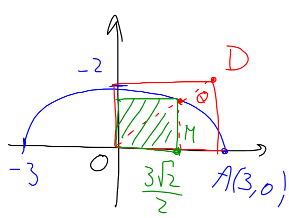
Tableau :

x	0	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	3
$A'(x)$	$+$	0	$-$
$A(x)$	↗	Max	↘

Réponse : Aire maxim. en $x = 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ et elle vaut

$$A\left(3\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{9-\frac{9}{2}}$$

$$= \frac{2}{\cancel{3}}\cancel{\sqrt{2}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{\sqrt{2}}} = 2\ [u.a.]$$



?