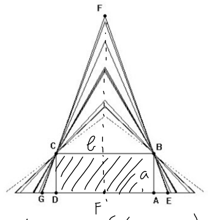
Exercice 5 : Soit un rectangle ABCD de côté AB=a et BC=b et le triangle isocèle exinscrit EFG. Etudier les variations de l'aire de ce triangle.



Constantes : $a = AB$
$b = BC$

fonction : Aire : $A = \sigma(EFG)$

$= \frac{1}{2}$ base · hauteur $= \frac{1}{2} GE \cdot \delta(F,(AD))$

$= \frac{1}{2} GE \cdot FF'$ où $F' = p_\perp(F) \in (AD)$

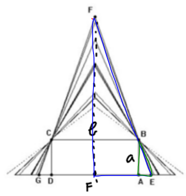
la variable : $x = FF'$ où $a < x$

le paramètre : $y = F'E = \frac{1}{2} FF'$

ou $x = F'E$, $y = FF'$

Résolution :

avec Thalès (triangles semblables)



$\Delta EFF' \sim \Delta EBA$ (critère AAA)

$\Leftrightarrow \left(\frac{EF}{EB} =\right) \frac{FF'}{BA} = \frac{F'E}{AE}$

$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{t}$ où $t = AE = F'E - F'A = y - \frac{b}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{y - \frac{b}{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{2y}{2y - b}$

$\Leftrightarrow 2yx - xb = 2y \cdot a \Leftrightarrow 2y(x-a) = xb$

$\Leftrightarrow 2y = \frac{bx}{(x-a)}$

Finalement : $A(x) = \frac{1}{2} x \cdot 2y = \frac{bx^2}{2(x-a)}$

* $A'(x) = \frac{b}{2}\left[\frac{2x(x-a) - x^2 \cdot 1}{(x-a)^2}\right] = \frac{b}{2} \frac{x^2 - 2ax}{(x-a)^2}$

$= \frac{b}{2} \frac{x(x-2a)}{(x-a)^2}$ (et $a < x$)

* $A'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\cancel{0}; 2a\}$
* signes de $A'(x)$:

x		0		a		2a	
$A'(x)$	+	0	−			0	+

$D =]a, +\infty[$

* Tableau des variations :

x	a		$2a$		$+\infty$
$A'(x)$		−	0	+	
$A(x)$		↘	Minimum	↗	

Réponse : L'aire est minimale en $x = 2a$ et vaut alors $A(2a) = \frac{b(2a)^2}{2(2a - a)} = \frac{4a^2 b}{2a} = 2ab$ [u.a.]

(le double de l'aire du rectangle ABCD)