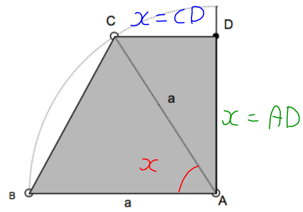
Exercice 6 :

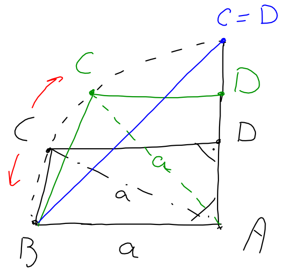
La grande base d'un trapèze ABCD rectangle en A est de longueur a et sa diagonale AC aussi.

Etudier la fonction « aire » de ce trapèze.



$x = m_{\angle}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

Données :



* constante : $a = AB = AC$

* fonction :

aire $= \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot AD$

* la variable :

$x = CD$

et $0 \leq x \leq a$

* paramètre :

$y = AD$

$x = AD$

$0 \leq x \leq a$

$y = CD$

Résolution :

$a = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot AD$

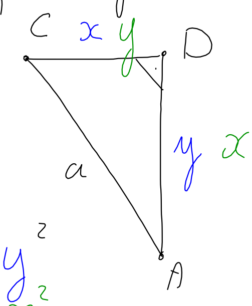
$= \frac{1}{2}(a + x) \cdot y$

$a = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot AD$

$= \frac{1}{2}(a + y) \cdot x$

Il nous faut exprimer y en fonction de la variable x et de la constante a :

Dans le triangle ACD, rectangle en D :



On a : $AC = a$

$CD = x$ y

$AD = y$ x

par Pythagore : $a^2 = x^2 + y^2$

$y^2 + x^2$

$\Leftrightarrow y^2 = a^2 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$

car $y > 0$

donc $a(x) = \frac{1}{2}(a+x)\cdot y$	$a(x) = \frac{1}{2}(a+y)\cdot x$
$\Rightarrow a(x) = \frac{1}{2}(a+x)\cdot\sqrt{a^2-x^2}$	$a(x) = \frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-x^2}\right)\cdot x$

* Dérivée :

$$a'(x) = \frac{1}{2}\left[1\cdot\sqrt{a^2-x^2} + (a+x)\cdot\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{a^2-x^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a^2-x^2-ax-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{-2x^2-ax+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \sqrt{a^2-x^2} > 0$$

ou

$$a'(x) = \frac{1}{2}\left[\left(a+\sqrt{a^2-x^2}\right)\cdot x\right]'$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{a^2-x^2}}\cdot x + \left(a+\sqrt{a^2-x^2}\right)\cdot 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{-x^2+a\sqrt{a^2-x^2}+a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{-2x^2+a\sqrt{a^2-x^2}+a^2}{2\cdot\sqrt{a^2-x^2}}$$

et $a'(x) = 0 \iff -2x^2-ax+a^2 = 0$

$\iff 2x^2+ax-a^2 = 0$

$\iff 2x^2+2ax-ax-a^2 = 0$

$\iff 2x(x+a) - a(x+a) = 0$

$\iff (x+a)(2x-a) = 0$

$\iff x \in \left\{\cancel{-a}\,;\,\frac{a}{2}\right\}$

* signes de $a'(x)$:

x		$-a$		0		$\frac{a}{2}$		a
$a'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

D : de 0 à a

* Tableau des variations :

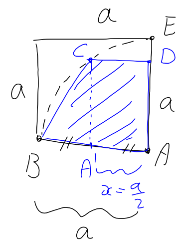
x	0		$\frac{a}{2}$		a
$a'(x)$		$+$	0	$-$	
$a(x)$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	

Réponse : L'aire est maximale en $x = \frac{a}{2}$

et elle vaut : $a\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(a+\frac{a}{2}\right)\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3a}{2}\sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2\;[u.a.]$$

$$\cong 0{,}65\cdot a^2\;[u.a.]$$



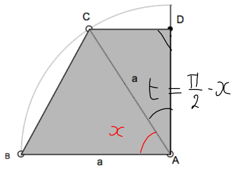
trapèze d'aire maximale

Optimisation

Exercice 6 :

La grande base d'un trapèze ABCD rectangle en A est de longueur a et sa diagonale AC aussi.

Etudier la fonction « aire » de ce trapèze.



Constante : $a = AB = AC$ $\qquad x = \widehat{m}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

fonction : Aire : $A = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot AD$

variable : $x = \widehat{m}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

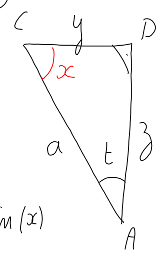
paramètre : $y = CD$

$z = AD$

Résolution : On a $A = \frac{1}{2}(a + y) \cdot z$

où y, z sont à exprimer en fonction de x et de a :

Dans le triangle ΔADC, rectangle en D



on a $t = \widehat{m}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} - x$

et $\cos(t) = \frac{AD}{AC} = \frac{z}{a}$

$\Rightarrow z = a\cos(t) = a\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a\sin(x)$

et $\sin(t) = \frac{CD}{AC} = \frac{y}{a}$

$\Rightarrow y = a\sin(t) = a\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a\cos(x)$

d'où $A(x) = \frac{1}{2}\left(a + a\cos(x)\right) \cdot a\sin(x)$

$= \frac{a^2}{2}\left(1 + \cos(x)\right) \cdot \sin(x)$

* d'où $A'(x) = \frac{a^2}{2}\left[-\sin^2(x) + \cos(x) + \cos^2(x)\right]$

$= \frac{a^2}{2}\left[-1 + \cos^2(x) + \cos(x) + \cos^2(x)\right]$

$= \frac{a^2}{2}\left(2\cos^2(x) + \cos(x) - 1\right) = \frac{a^2}{2}(2\cos(x) - 1)\underbrace{(\cos(x) + 1)}_{>0}$ $\quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

* puis $A'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(x) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ (et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$)

et signes de $A'(x)$:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$A'(x)$		$+$ $-$	0	$-$ $+$	

?