

Examen de mathématiques - I

Les formulaires et tables ainsi que les calculatrices sont autorisés.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$:
 - a) $\sqrt{x^2 - 6x} < 4$
 - b) $\sqrt{x^2 + x + 2} \geq x + 1$
 - c) $3x^4 + 10x^2 - 8 = 0$
- 2) Résoudre et discuter le système d'équations paramétriques suivant :
$$\begin{cases} mx + 4y = 2 \\ (m - 2)x + my = m + 3 \end{cases}$$
- 3) Dans un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$,
on donne les points A($-3m+2$; $m-1$), B($-m$; $m+4$) et C($4m + 4$; $2m$).
 - a) Calculer m si A, B et C sont alignés.
 - b) Si $\mathcal{R}$ est orthonormé, calculer m si $(AC) \perp (BC)$.
 - c) Calculer m si l'on donne le point D(1 ; -10) et si le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
 - d) Si $m = -3$, calculer une équation de la droite (BC),
A est-il un point de cette droite (BC) ?

$$1) a) \underbrace{\sqrt{x^2 - 6x}}_{+} < \underbrace{4}_{+} \quad \text{et } x \in]-\infty, 0] \cup [6, +\infty[$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x < 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-8)(x+2) < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-2; 8[\cap \mathbb{D}$$

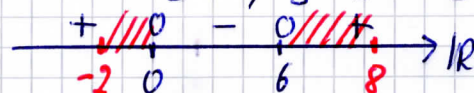
$$\Leftrightarrow x \in]-2; 0] \cup [6; 8[$$

voir brier :

$$x^2 - 6x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-6) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; 0] \cup [6; +\infty[$$



$$b) \underbrace{\sqrt{x^2 + x + 2}}_{+} \geq \underbrace{x+1}_{?} \quad \text{et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \text{ et } (+ \geq -)$$

$$\text{et } x \in]-\infty; -1]$$

ou

$$x \in]-1; +\infty[\text{ et } (+ \geq +)$$

$$\text{et } x^2 + x + 2 \geq (x+1)^2$$

$$\text{et } x^2 + x + 2 \geq x^2 + 2x + 1$$

$$\text{et } 1 \geq x \quad \text{et } x \in]-1; 1]$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -1] \cup]-1; 1]$$

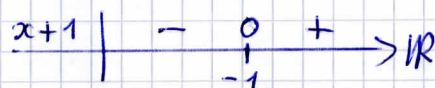
$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; 1]$$

voir brier :

$$x^2 + x + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$$

$$\text{et } x \in \mathbb{R}$$



$$c) 3x^4 + 10x^2 - 8 = 0 \quad \text{et } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 \text{ et } 3y^2 + 10y - 8 = 0$$

$$\text{et } 3y^2 + 12y - 2y - 8 = 0$$

$$\text{et } 3y(y+4) - 2(y+4) = 0$$

$$\text{et } (y+4)(3y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x^2+4)}_{\neq 0} (3x^2-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\begin{cases} m+n = 10 \\ m \cdot n = -24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = +12 \\ n = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\sqrt{6}}{3}; -\frac{\sqrt{6}}{3} \right\}$$

2) Résoudre : $\begin{cases} mx + 4y = 2 \\ (m-2)x + my = m+3 \end{cases}$ et $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow D = \begin{vmatrix} m & 4 \\ m-2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 8 \quad \text{et } D \neq 0 \quad (\text{car } \Delta' = 4 - 8 = -4 < 0)$$

et

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ m+3 & m \end{vmatrix} = 2m - 4m - 12 = -2m - 12 = (-2)(m+6)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 2 \\ m-2 & m+3 \end{vmatrix} = m^2 + 3m - 2m + 4 = m^2 + m + 4 \neq 0$$

(car $\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$)

$$\text{et } (x, y) \in \left\{ \left(\frac{-2(m+6)}{m^2 - 4m + 8}, \frac{m^2 + m + 4}{m^2 - 4m + 8} \right) \right\}$$

3) On a un repère $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et les points $A(-3m+2; m-1)$, $B(-m; m+4)$ et $C(4m+4; 2m)$

a) Calculer m si A, B, C alignés :

$$A, B, C \text{ alignés} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2m-2 & 7m+2 \\ 5 & m+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2m-2)(m+1) - 5(7m+2) = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 2 - 35m - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 35m - 12 = 0 \Leftrightarrow \Delta = (-35)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12) = 1225 + 96 = 1321$$

et

$$m = \frac{35 \pm \sqrt{1321}}{4}$$

$$\Leftrightarrow m \in \left\{ \frac{35 + \sqrt{1321}}{4}, \frac{35 - \sqrt{1321}}{4} \right\}$$

$$3b) (AC) \perp (BC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7m+2 \\ m+1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 5m+4 \\ m-4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (7m+2) \cdot (5m+4) + (m+1)(m-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 35m^2 + 38m + 8 + m^2 - 3m - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 36m^2 + 35m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 35^2 - 4 \cdot 36 \cdot 4 = 649 > 0$$

$$\text{et } m = \frac{-35 \pm \sqrt{649}}{72}$$

$$\Leftrightarrow m \in \left\{ \frac{-35 + \sqrt{649}}{72} ; \frac{-35 - \sqrt{649}}{72} \right\}$$

$$\begin{cases} a+b=35 \\ a \cdot b=436 \end{cases} ?$$

3c) ABCD parallélogramme et D(1, -10)

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2m-2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4m+3 \\ 2m+10 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-2 = 4m+3 \\ 5 = 2m+10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -5 \\ 2m = -5 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2}$$

réponse: $m = -\frac{5}{2}$

3d) si $m = -3$, alors $A(11; -4)$, $B(3; 1)$
et $C(-8; -6)$

calculer une équation de la droite (BC) :

$$M(x; y) \in (BC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & -11 \\ y-1 & -7 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -7(x-3) + 11(y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -7x + 11y + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x - 11y - 10 = 0 : (BC)$$

$$* \text{ De plus } A(11; -4) \in (BC) \Leftrightarrow 7 \cdot 11 - 11 \cdot (-4) - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 77 + 44 - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 111 = 0$$

donc $A \notin (BC)$

ou $A \notin (BC)$ car si $A \in (BC)$, $m \in \left\{ \frac{35 + \sqrt{1321}}{4}, \frac{35 - \sqrt{1321}}{4} \right\}$