

Examen de mathématiques - 2

Les formulaires et tables ainsi que les calculatrices sont autorisés.

- 1) Si $\cot(x) = 1$, sans calculer x , calculer $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\tan(x)$.
Justifier et faire une figure
- 2) Résoudre les équations trigonométriques suivantes :
 - a) $\sin(3x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$
 - b) $\tan(x) + \cot(x) = 2$
 - c) $\cos(x) - \sin(x) = 0$
 - d) $\sqrt{3}\sin^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) - \sqrt{3}\cos^2(x) = 0$
- 3) Soit un triangle $\triangle ABC$.
On donne $\gamma = 50^\circ$ la mesure de l'angle de sommet C, $b = AC = 2$, $c = AB = \sqrt{2}$.
Calculer l'angle limite et en déduire si le problème admet ou non des solutions.
Faire une figure la plus précise possible pour illustrer votre propos.

1) Soit $\cot(x) = 1$, alors $\tan(x) = \frac{1}{\cot(x)} = \frac{1}{1} = 1$

et $\frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \cot^2(x) \Rightarrow \frac{1}{\sin^2(x)} = 2 \Rightarrow \sin^2(x) = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow \sin(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

de plus $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$
 $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(x) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

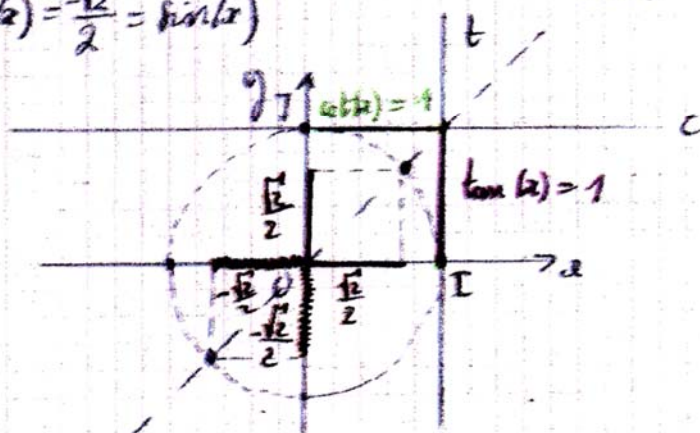
réponse: $\tan(x) = 1$

$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(x)$

ou

$\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(x)$

car $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1 > 0$



2a) $\sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$

$$\begin{aligned}
2b) \quad & \tan(x) + \cot(x) = 2 \quad \text{et} \quad x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi \right\} \\
\Rightarrow & \tan(x) + \frac{1}{\tan(x)} = 2 \quad \text{et} \quad \dots \\
\Rightarrow & \tan^2(x) + 1 = 2 \tan(x) \quad \text{et} \quad \dots \\
\Rightarrow & \tan^2(x) - 2 \tan(x) + 1 = 0 \quad \text{et} \quad \dots \\
\Rightarrow & \tan(x) - 1 = 0 \quad \text{et} \quad \dots \\
\Rightarrow & \tan(x) = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad \dots \\
\Rightarrow & x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c) \quad & \cos(x) - \sin(x) = 0 \quad \text{et} \quad x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow & \cos(x) = \sin(x) \\
\Rightarrow & \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
\Rightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{2} + x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \text{ou} \\ 0 \cdot x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \\
\Rightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \text{ou} \\ x \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}
\end{aligned}$$

2d) $\sqrt{3} \sin^2(x) - 2 \sin(x) \cos(x) - \sqrt{3} \cos^2(x) = 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \cos(x) \neq 0$ et $\sqrt{3} \tan^2(x) - 2 \tan(x) - \sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{3} \tan^2(x) - 3 \tan(x) + \tan(x) - \sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{3} \tan(x) (\tan(x) - \sqrt{3}) + 1 \cdot (\tan(x) - \sqrt{3}) = 0$

$\Rightarrow (\tan(x) - \sqrt{3}) (\sqrt{3} \tan(x) + 1) = 0$

$\Rightarrow \tan(x) = \sqrt{3} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ou $\tan(x) = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi; -\frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$

$\begin{cases} m+m=-2 \\ m \cdot m = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 1 \end{cases}$

3) Données: $\begin{cases} * \text{ un triangle } \triangle ABC \\ * \gamma = 50^\circ, B = AC = 2, c = AB = \sqrt{2} \end{cases}$

Calcul de l'angle limite γ^i :

On a: $\sin(\gamma^i) = \frac{AB'}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \gamma^i = 45^\circ$

donc $\gamma = 50^\circ > \gamma^i$
et le problème admet pas
de solution.

