3 B-C sciences Vendredi 18 septembre 2020

Examen de mathématiques - 3

1) Dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne la droite d par une représentation paramétrique d : $\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = -1 + 4k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$;

   a) Calculer une équation cartésienne « implicite » de la droite d ;
   b) calculer la pente de la droite d ;
   c) soit la droite e donnée par une équation e : $4x - 5y - 1 = 0$;
      étudier la position relative des droites d et e.
      Si elles sont sécantes, calculer les coordonnées de leur point d'intersection ;
   d) soit la droite d' d'équation d' : $y = -2x + 7$;
      1) calculer une équation cartésienne de la droite d_1 parallèle à d' et passant par le point A(-2 ;5) ;
      2) calculer une équation cartésienne de la droite d_2 perpendiculaire à d' et passant par le point A(-2 ;5).

2) Dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne le triangle ΔABC par les points A(-2,1), B(0,3) et C(1,-4).

   a) Calculer une équation de la médiatrice $m_{[A,C]}$ du segment [A,C] ;
   b) calculer la pente de la médiane m_A issue du sommet A ;
   c) calculer un vecteur directeur de la hauteur h_B issue du sommet B ;
   d) calculer une représentation paramétrique de la droite (AC).

1) Données : $\begin{cases} * \ \mathcal{B} = (O, \vec{i}, \vec{j}) \ \text{R.O.N.} \\ * \text{ une droite } d : \begin{cases} x = 3+2k \\ y = -1+4k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \end{cases}$

Résolution :

a) calculer une équation "implicite" de d :

$$d : \begin{cases} x = 3+2k \\ y = -1+4k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} k = \frac{x-3}{2} \\ y = -1+4\left(\frac{x-3}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2y = -2+4x-12 \iff 4x-2y-14 = 0$$

$$\iff 2x-y-7 = 0 \quad (1)$$

b) pente de d : on a $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ un vect. dir. de d

d'où $m = \frac{2}{1} = 2$, pente de d ;

ou : de (1) $y = 2x-7 \Rightarrow m = 2$ pente

c) soit la droite $e : 4x-5y-1=0$

On a : $\vec{e} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\det(\vec{e}, \vec{d}) = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

$= 10-4 = 6 \neq 0$

donc e et d sont deux droites sécantes.

Soit $A(x;y) \in e \cap d \iff \begin{cases} 2x-y-7=0 \\ 4x-5y-1=0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 2x-y = 7 \\ 4x-5y = 1 \end{cases} \iff D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -10+4 = -6$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -35+1 = -34$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2-28 = -26$$

et $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-34}{-6} = \frac{17}{3}$ et $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-26}{-6} = \frac{13}{3}$

donc $A\left(\frac{17}{3}; \frac{13}{3}\right) \in e \cap d$

d) Soit la droite d' : $y = -2x + 7$

1) Soit $d_1 \parallel d'$ et $d_1 \ni A(-2;5)$:

donc $d_1 : y = -2x + h$ $\quad (d_1 \parallel d' \Leftrightarrow m_1 = m')$

or $A(-2;5) \in d_1 \Leftrightarrow 5 = (-2)(-2) + h \Leftrightarrow h = 1$

réponse : $d_1 : y = -2x + 1$

2) Soit $d_2 \perp d'$ et $d_2 \ni A(-2;5)$:

soit m_2 pente de d_2, alors $m_2 \cdot m' = -1$

$$\Leftrightarrow m_2 = \frac{-1}{m'} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

donc $d_2 : y = \frac{1}{2}x + h$

et $A(-2;5) \in d_2 \Leftrightarrow 5 = \frac{1}{2}(-2) + h \Leftrightarrow h = 6$

réponse : $d_2 : y = \frac{1}{2}x + 6 \Leftrightarrow d_2 : x - 2y + 12 = 0$

2) Données : $\begin{cases} * \text{ un R.O.N.} \\ * \ A(-2;1),\ B(0;3) \text{ et } C(1;-4) \end{cases}$

Résolution :

a) équation de la médiatrice de $[A,C]$: $m_{[A,C]}$

On a $m_{[A,C]} \perp (AC)$ donc $\vec{AC}$ est vecteur normal de $m_{[A,C]}$

et $m_{[A,C]} \ni B'$, où $B'\left(-\frac{1}{2} ; -\frac{3}{2}\right)$ milieu de $[A,C]$

donc $m_{[A,C]} : 3x - 5y + c = 0$ où $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

et $B'\left(\frac{-1}{2} ; \frac{-3}{2}\right) \in m_{[A,C]} \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{-1}{2} - 5 \cdot \frac{-3}{2} + c = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-3}{2} + \frac{15}{2} + c = 0 \Leftrightarrow c = -6$$

réponse : $m_{[A,C]} : 3x - 5y - 6 = 0$

b) Calculer la pente de la médiane m_A issue de A :

On a $m_A = (AA')$ où $A(-2;1)$ et $A'\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

et par définition $m_A = \left(\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}\right) = \frac{-\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}-(-2)} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{3}{5}$

c) Calculer un vecteur directeur de h_B, hauteur issue de B :

On a $h_B \perp (AC)$ et $\vec{AC} = \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ vect. normal à h_B

donc $\vec{n} = \begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$ est vecteur dir. de h_B.

d) Soit la droite (AC) avec $\vec{AC} = \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ vect. directeur

donc $(AC) : \begin{cases} x = -2+3k \\ y = 1-5k \end{cases}, \; k \in \mathbb{R}$

Exercice : 2a