Examen de mathématique – 5

(Géométrie analytique plane)

Les formulaires et tables ainsi que les calculatrices ne sont pas autorisés.

1) Présenter et démontrer le théorème sur la distance d'un point à une droite dans **le format vectoriel.**

2) Présenter et démontrer le théorème donnant le produit scalaire de deux vecteurs en fonction de leur angle.

3) Présenter la définition de la pente d'une droite, en déduire une équation d'une droite de pente donnée et contenant un point donné.

4) Poser $\boxed{H}$ et $\boxed{T}$ puis démontrer ce théorème :
Dans un repère orthonormé, on donne deux droites d_1 et d_2 de pente m_1 et m_2 ; démontrer que $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$.

5) Présenter la construction des équations paramétriques d'une droite d définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{d}$.

Questions pour l'examen théorique du 6 novembre

1) Comment construire une équation de droite :
   * par 2 points
   * par un point et un vecteur directeur
   * par un point et un vecteur normal
   * par un point et parallèle (perpendiculaire) à une droite
   * par un point et de pente donnée.

1) Équations paramétriques d'une droite.

2) Comment construire une équation cartésienne d'un cercle. (2 types)

3) Quel est l'ensemble $E = \{ M(x;y) \in P \mid x^2+y^2+ax+by+c=0, \text{ où } \{a;b;c\} \subset \mathbb{R} \}$

4) Positions relatives de deux droites,
   de deux cercles,
   d'une droite et d'un cercle

5) <u>Théorème :</u> $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

6) Présentation du thm-déf. du produit scalaire

7) Théorèmes des 4 propriétés du produit scalaire

8) Théorème dont la "morale" est :

Le produit scalaire est indépendant de la base orthonormée choisie.

9) Théorème : distance-point-droite :
   * formule vectorielle
   * formule analytique

10) Théorème : expression trigonométrique du produit scalaire

7	**Distance point - droite**

Introduction

$*\ \delta(A,B) = AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

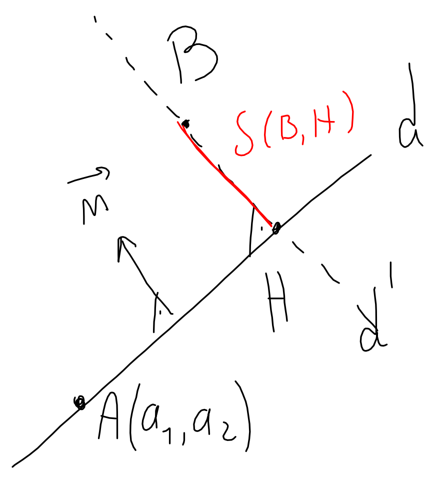
où $A(a_1;a_2)$ et $B(b_1;b_2)$ dans un R.O.N.

$*\ \delta(B,d) = BH = ??$

où $H = p_\perp(B) \in d$

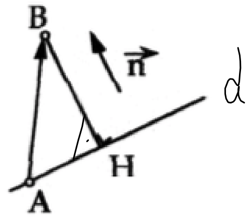
et $d \ni A$

et $\vec{n}$ un vecteur normal



(H) Base B.O.N. $\vec{n}$ vect. normal de d, $A \in d$ $(\vec{n} \neq \vec{0})$

$B \in \mathbb{P}$ et $d \subset \mathbb{P}$



(T) $$\delta(B,d) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

(D) $$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \cdot \vec{n} \quad \text{(Charles)}$$

et $H = p_\perp(B) \in d$

$$\overset{\text{thm}}{=} \underbrace{\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}}_{=0 \ (H)} + \overrightarrow{HB} \cdot \vec{n}$$

$$= \overrightarrow{HB} \cdot \vec{n}$$

(ici $\overrightarrow{HB}$ et $\vec{n}$ colin. par (H) $\Leftrightarrow \overrightarrow{HB} = \lambda \cdot \vec{n}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$)

$$= (\lambda \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

$$\overset{\text{thm}}{=} \lambda \cdot (\underbrace{\vec{n} \cdot \vec{n}}_{(\vec{n})^2}) \overset{\text{(rem)}}{=} \lambda \cdot \|\vec{n}\|^2 = \lambda \cdot \|\vec{n}\| \cdot \|\vec{n}\|$$

$$= \pm \|\lambda \cdot \vec{n}\| \cdot \|\vec{n}\| = \pm \|\overrightarrow{HB}\| \cdot \|\vec{n}\|$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = \pm \|\overrightarrow{HB}\| \cdot \|\vec{n}\|$$

$$\Leftrightarrow \delta(B,d) = \|\overrightarrow{HB}\| = \frac{\pm(\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n})}{\|\vec{n}\|}$$

$$\Leftrightarrow \delta(B,d) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

cqfd

(forme vectorielle)

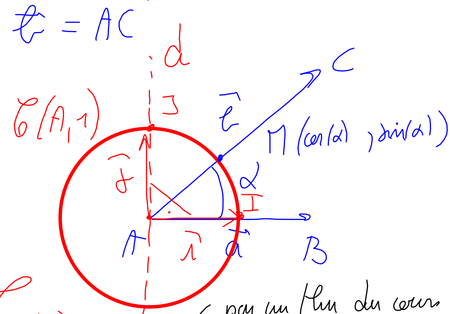
8.3 Théorème :

(H) $\{\vec{a}, \vec{b}\} \subset V_2$ et une B.O.N

$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

(T) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$

(D) Soit $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$



Soit un repère $\mathcal{R} = (A, \vec{\imath}, \vec{j})$

où $\vec{\imath} = \overrightarrow{AI}$

et $I \in [A,B) \cap \mathcal{C}(A,1)$

(par un thm du cours : choix de la base libre)

et $\vec{j} \perp \vec{\imath}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{AJ}$ où $J \in \mathcal{C}(A,1) \cap d$

et $d \ni A$

$d \perp (AB)$

d'où $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} \|\vec{a}\| \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|\vec{c}\| \cdot \cos(\alpha) \\ \|\vec{c}\| \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha) + 0$

où $\vec{a} = \|\vec{a}\| \cdot \vec{\imath} + 0 \cdot \vec{j}$ car $\vec{a} = k \cdot \vec{\imath}$ $(k > 0)$

et $\|\vec{a}\| = \|k \cdot \vec{\imath}\|$

$= |k| \cdot \|\vec{\imath}\|$

$= k \cdot 1$

de plus : $\Leftarrow k = \|\vec{a}\|$

$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = k' \cdot \overrightarrow{AM}$ où $M \in \mathcal{C}(A,1) \cap [A,C)$

avec $\|\vec{b}\| = \|k' \cdot \overrightarrow{AM}\| = |k'| \cdot \underbrace{\|\overrightarrow{AM}\|}_{=1}$ (car $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AC}$ de même sens par construction)

$\Leftarrow k' = \|\vec{b}\|$

d'où $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \|\vec{b}\| \cdot \overrightarrow{AM} = \|\vec{b}\| \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix} \|\vec{c}\| \cdot \cos(\alpha) \\ \|\vec{c}\| \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}$

cqfd

4.2 Droite de pente m passant par un point P_1

Si la droite d est donnée par deux points distincts $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1,b_2)$, elle a pour vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$. Si $b_1 \neq a_1$, le rapport $m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$ se nomme **coefficient directeur de** la droite d.

Dans un repère orthonormé, si $d_1 \neq 0$, le nombre $\frac{d_2}{d_1} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = m$ s'appelle **pente** de la droite.

Alors, si $d_1 \neq 0$, l'équation 1 peut aussi s'écrire $y - y_1 = \frac{d_2}{d_1}(x - x_1)$

et $$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)} \qquad (3)$$

est une équation cartésienne d'une droite de pente m passant par un point $P_1 (x_1 ; y_1)$

cf p. 54 F. + T.

* Soit $d = (AB)$ et $A(a_1 ; a_2)$ et $B(b_1 ; b_2)$

et $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$

et $d : d_2 x - d_1 y + \underbrace{\left(d_1 \overset{a_2}{\cancel{y_1}} - d_2 \overset{a_1}{\cancel{x_1}}\right)}_{=c} = 0 \quad (1)$

$$\Leftrightarrow y = \underset{m}{\frac{d_2}{d_1}} x + \frac{c}{d_1}$$

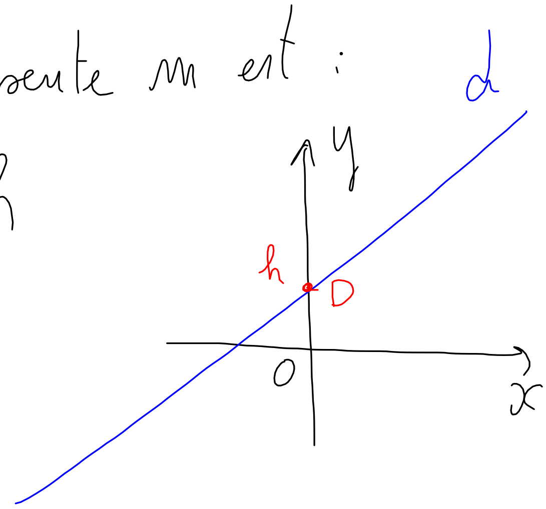
où $m = \dfrac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \dfrac{d_2}{d_1}$ $\left(\begin{array}{l} \text{et } d_1 \neq 0 \\ \quad b_1 \neq a_1 \end{array}\right)$

d'où une équation cartésienne d'une droite d de pente m est :

$$d : y = mx + h$$

où h est "l'ordonnée à l'origine"

(le point $D(0, h) \in d$)



(cf F.T. page 54)

Hypothèses :
Un repère orthonormé
Deux droites d1 et d2 de pente
respectivement m1 et m2

Thèse : d1 $\perp$ d2 <=> m1 $\cdot$ m2 = -1

Démonstration :

Soit $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$
les équations cartésiennes de deux droites d_1 et d_2.

Leurs vecteurs normaux respectifs sont $\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} -b_1 \\ a_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} -b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Alors, selon le critère d'orthogonbalité, on a

$$\boxed{d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{d}_1 \perp \vec{d}_2 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0}$$

Si aucune des deux droites n'est verticale, les premières composantes des vecteurs directeu
$\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} -b_1 \\ a_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} -b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$ sont différentes de 0 et on a

$$\begin{aligned} d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{d}_1 \perp \vec{d}_2 &\Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a_1}{-b_1} \cdot \frac{a_2}{-b_2} + 1 = 0 \\ & \quad m_1 m_2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1}$$

CQFD

Autre format de représentation d'une droite
par des équations :

4.4 Système d'équations paramétriques

A chaque point P du plan, on associe un et un seul nombre k tel que (ici $P_1(x_1; y_1)$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$)

$P(x;y) \in d(P_1, \vec{d}) \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P} = k \cdot \vec{d} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kd_1 \\ kd_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{y_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{kd_1} \\ \mathbf{kd_2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x_1 + kd_1} \\ \mathbf{y_1 + kd_2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x = x_1 + kd_1 \\ y \overset{\text{et}}{=} y_1 + kd_2 \end{cases} \text{et } k \in \mathbb{R}} \qquad (5)$$

les équations paramétriques
de la droite $d(P_1, \vec{d})$
(cf F.T. page 54)