Examen de mathématique - 7

(Final de géométrie analytique plane)

Soit $\mathscr{R} = (O ; \vec{i} ; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

1) Un segment [AB] de longueur AB = c est « appuyé » contre l'axe des ordonnées en B et « posé » sur l'axe des abscisses en A.
   a) Lorsque le segment « glisse » le long de l'axe Oy et simultanément sur l'axe Ox, étudier analytiquement le lieu géométrique du point M(x,y), un point quelconque fixe du segment]A,B[; faire une figure d'étude.
   b) Même question si le point M est tel que le quadrilatère OAMB est un rectangle.

2) Soit les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'équation $\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 = 1$ et $\mathscr{C}_2 : x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$.
   a) Déterminer les centres et les rayons de $\mathscr{C}_1$ et de $\mathscr{C}_2$.
   b) Démontrer analytiquement **et** géométriquement que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont tangents **extérieurement**, puis calculer une équation de leur tangente commune.
   c) Par le point $P(-\frac{5}{3},0)$ on mène les tangentes t_1 et t_2 au cercle $\mathscr{C}_2$.
   Calculer une équation de ces deux tangentes.
   Puis démontrer que ces deux tangentes t_1 et t_2 sont aussi tangentes à $\mathscr{C}_1$.

① Données : * constantes : $c \in \mathbb{R}_+^*$, $k \in]0;1[$

* paramètres : $A(a;0) \in (OI)$
$B(0,b) \in (OJ)$

* variables : $M(x;y)$

* conditions : 1) $M \in]A;B[$
2) $AB = c$

Résolution : On a 4 variables : x, y, a et b

a) 1) $M \in]A;B[\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et $k \in]0;1[$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-a \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-a = -ak \\ y = kb \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a(1-k) \\ y = b \cdot k \end{cases}$$

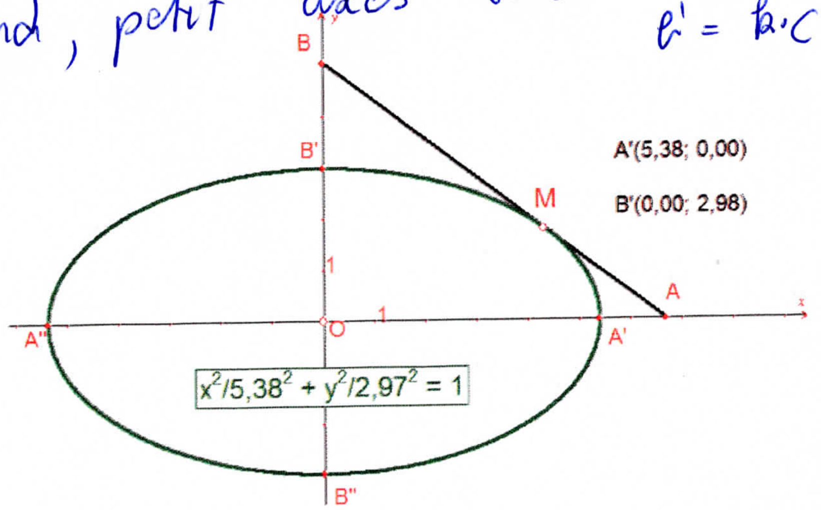
2) $AB = c \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = c$ où $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2 = c^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a(1-k) \\ y = b \cdot k \\ a^2+b^2 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{x}{1-k} \\ b = \dfrac{y}{k} \\ a^2+b^2 = c^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{(1-k)^2} + \frac{y^2}{k^2} = c^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{((1-k)c)^2} + \frac{y^2}{(kc)^2} = 1$$ équation d'une ellipse

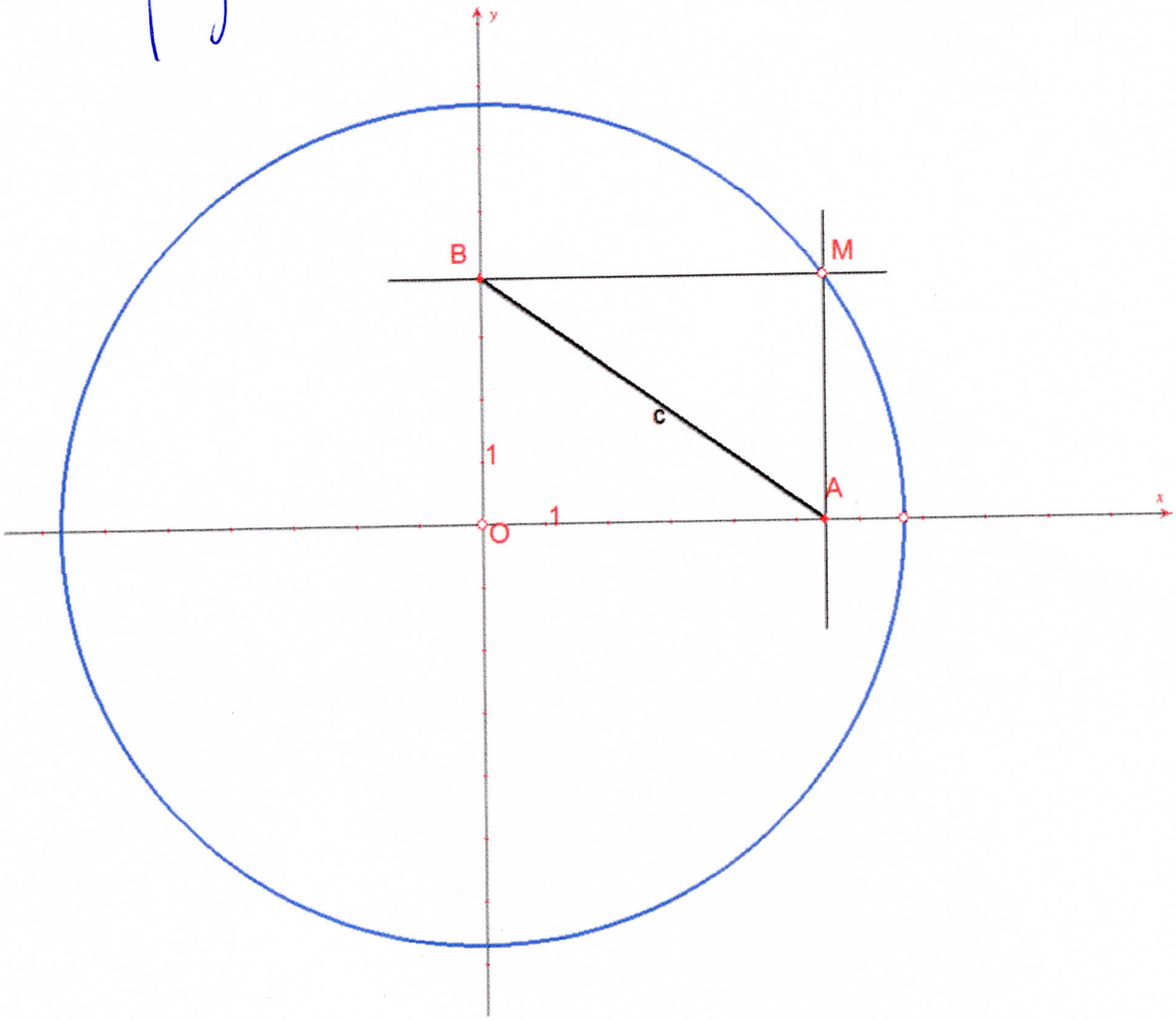
donc les grand, petit axes sont $a' = 1-k \cdot c$ et $b' = k \cdot c$



b) conditions : 1) $AB = c$
2) $OAMB$ rectangle

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} = c \\ \text{et} \\ \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BM} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = c^2 \\ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-0 \\ y-b \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ \text{et} \\ x=a \\ y=b \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=c^2$$ équation du cercle $\mathcal{C}(O,c)$



② Données : $\begin{cases} * \text{ cercle } \mathcal{C}_1 : x^2+y^2=1 \\ * \text{ cercle } \mathcal{C}_2 : x^2+y^2-10x+9=0 \end{cases}$

a) $\mathcal{C}_1$ est le cercle $\mathcal{C}(O(0,0),1)$

$\mathcal{C}_2 : x^2+y^2-10x+9=0 \Leftrightarrow \mathcal{C}_2 : (x-5)^2+y^2=16=4^2$

donc $\mathcal{C}_2$ est le cercle $\mathcal{C}(O_1(5;0), 4)$

b) * $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$: $\begin{cases} x^2+y^2=1 & (1) \\ x^2+y^2-10x+9=0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 10x-9=1 & (1)-(2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ donc $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{ I(1;0) \}$

* géométriquement : on a $r_1 = 1$ et $r_2 = 4$

et $OO_1 = \| \overrightarrow{OO_1} \| = \sqrt{5^2+0^2} = 5$

comme $r_1 + r_2 = 1+4 = 5 = OO_1$, les cercles sont tgts extér.

* la tangente commune t est, par exemple, la tangente à $\mathcal{C}_1$ par le point $I(1;0) \in \mathcal{C}_1$:

d'où $t : x \cdot \overset{1}{\cancel{x}} + y \cdot \overset{0}{\cancel{y}} = 1 \Leftrightarrow t : x = 1$

c) Soit $P\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$, et $t_{1,2} : y = mx + h$, tgtes à $\mathcal{C}_2$ par P.

(comme $\delta(P, O_1) = \| \overrightarrow{PO_1} \| = \left\| \begin{pmatrix} 5+\frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{20}{3} > r_2 = 4$, les tangentes existent)

* On a : $P \in t_{1,2} \Leftrightarrow 0 = m \cdot \left(\frac{-5}{3}\right) + h \Leftrightarrow h = \frac{5m}{3}$

d'où $t_{1,2} : y = mx + \frac{5m}{3} \Leftrightarrow mx - y + \frac{5m}{3} = 0$

* De plus $t_{1,2}$ tgtes à $\mathcal{C}_2 \Leftrightarrow \delta(O_1, t_{1,2}) = r_2$

$\Leftrightarrow \dfrac{| m \overset{5}{\cancel{x}} - \overset{0}{\cancel{y}} + \frac{5m}{3} |}{\sqrt{m^2+1}} = 4 \Leftrightarrow \left| \frac{20}{3} m \right| = 4\sqrt{m^2+1}$

$\Leftrightarrow \left| \frac{5}{3} m \right| = \sqrt{m^2+1} \Leftrightarrow \frac{25}{9} m^2 = m^2 + 1 \Leftrightarrow m^2 = \frac{9}{16}$

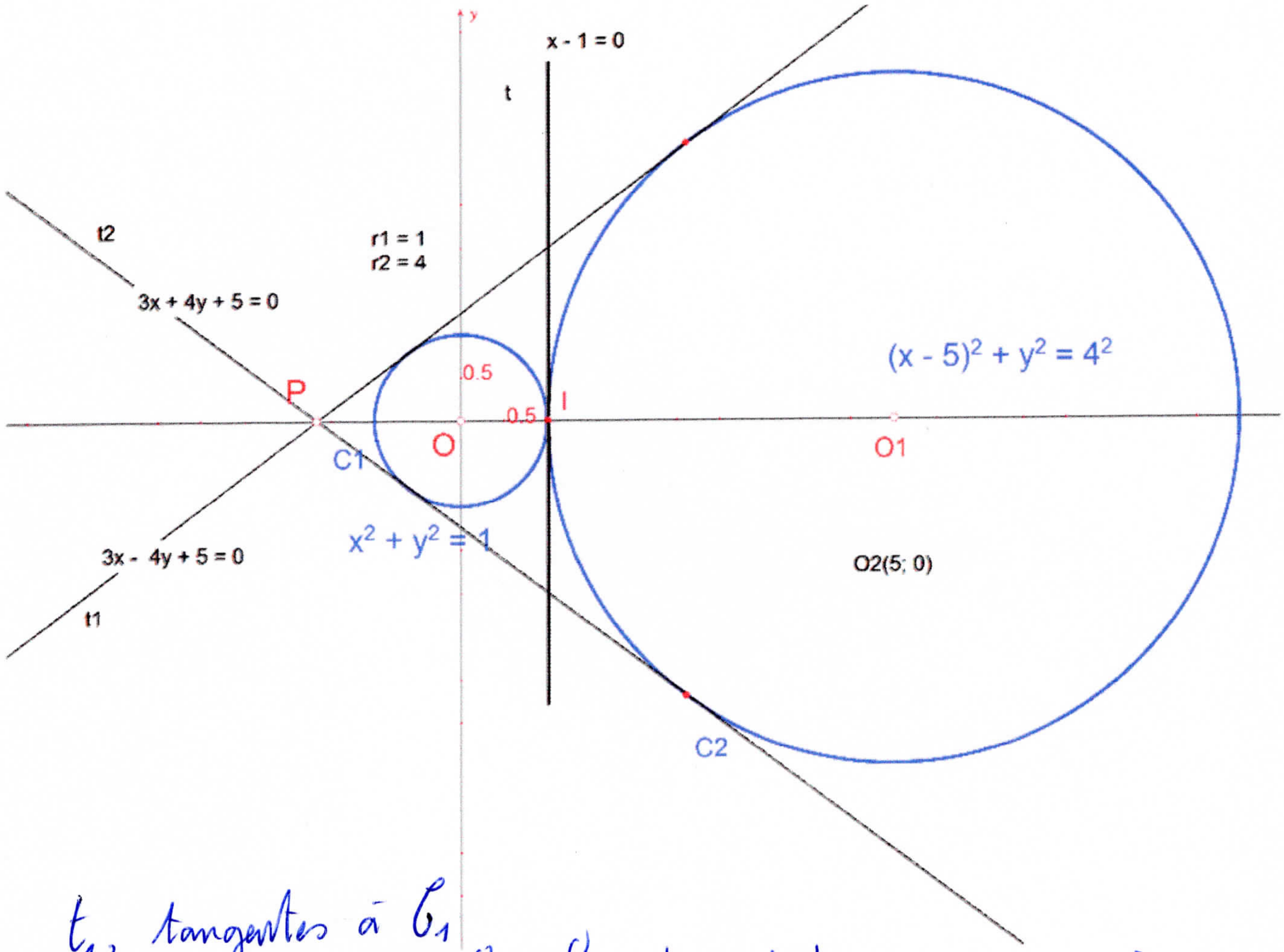
$\Leftrightarrow m \in \left\{ \frac{3}{4} ; \frac{-3}{4} \right\}$

d'où si $m = \frac{3}{4}$, $h = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

et $t_1 : y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \Leftrightarrow 3x - 4y + 5 = 0 : t_1$

et si $m = \frac{-3}{4}$, $h = \frac{-5}{4}$

et $t_2 : y = \frac{-3}{4}x - \frac{5}{4} \Leftrightarrow 3x + 4y + 5 = 0 : t_2$



$t_{1,2}$ tangentes à $\mathcal{C}_1$

car $\delta(O, t_{1,2}) = \frac{|3\overset{0}{x} \pm 4\overset{0}{y} + 5|}{\sqrt{3^2 + (\pm 4)^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1 = r_1$