3 B – C sciences Vendredi 26 mars 2021

Examen de mathématique

(Les limites-1)

1) Compléter avec le cours :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \ldots$ b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \ldots$

2) Démontrer que la limite d'une suite est unique (poser $\boxed{H}$, $\boxed{T}$, $\boxed{D}$)

3) Démontrer à partir de la définition de la limite d'une suite :

$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$, si $0 < q < 1$ (poser $\boxed{H}$, $\boxed{T}$, $\boxed{D}$)

4) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 7x + 10}$

b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 7x + 10}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}}$

d) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + x^2 - 8x - 12}{x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 12x + 12}$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x - 2|}{-x^2 - 2x + 8}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$

g) $\lim\limits_{x \to +\frac{\pi}{2}} \dfrac{1 + \cos(2x)}{1 - \sin(x)}$

Pour chaque limite on demande de bien détailler les étapes de calculs et de préciser clairement quand une limite de référence est utilisée.

1) a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A>0,\ \exists B_A>0$ tel que $x<-B_A \Rightarrow f(x)>A$

b) $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta_\varepsilon>0$ tel que $|x-x_0|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

4) a) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-7x+10} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}(x-5)} = \frac{-5}{3}$$

b) $$\lim_{x\to 5}\frac{x^2+x-6}{x^2-7x+10} = \lim_{\substack{x\to 5\\ > \\ <}}\frac{x+3}{x-5} = \frac{8}{0_{\substack{+\\-}}} = \substack{+\infty\\-\infty}$$

c) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}\cdot\frac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{2x}+2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(2x-4)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}\right)}{\left(\sqrt{2x}+2\right)(x+1-2x+1)} = \lim_{x\to 2}\frac{2\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}\right)}{\underset{(-1)}{\cancel{(-x+2)}}\left(\sqrt{2x}+2\right)}$$

$$= \frac{2\cdot 2\sqrt{3}}{(-1)\cdot 4} = -\sqrt{3}$$

d) $$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+x^2-8x-12}{x^4+4x^3+7x^2+12x+12} = \frac{-8+4+16-12}{16-32+28-24+12} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-x-6)}{\cancel{(x+2)}(x^3+2x^2+3x+6)} = \frac{0}{-8+8-6+6} = \frac{0}{0}$$

	1	1	-8	-12
		-2	2	+12
-2	1	-1	-6	0

$$= \lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x-3)}{\cancel{(x+2)}(x^2+3)} = \frac{-5}{7}$$

	1	4	7	12	12
		-2	-4	-6	-12
-2	1	2	3	6	0
		-2	0	-6	
-2	1	0	3	0	

e) $\lim_{x\to 2} \underbrace{\frac{|x-2|}{-x^2-2x+8}}_{f(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \cdots$ n'existe pas car :

$*\ \lim_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{\cancel{x-2}\ 1}{-(\cancel{x-2})(x+4)} = \frac{-1}{6}$

$*\ \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{\cancel{-x+2}\ 1}{(\cancel{-x+2})(x+4)} = \frac{1}{6}$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin(x)}}{x} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+\sin x)-(1-\sin(x))}{x\left(\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}}$

$= 2\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}}_{=1\ \text{(LR)}}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}}}_{=\frac{1}{2}} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$

g) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{1-\sin(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)+\cancel{\sin^2(x)}+\cos^2(x)-\cancel{\sin^2(x)}}{1-\sin(x)}$

$= 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{1-\sin(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = 2\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\cancel{1-\sin(x)})(1+\sin(x))}{(\cancel{1-\sin(x)})} = 2.2 = 4$

* Théorème : Si une suite admet une limite ℓ, elle est unique.

Ⓗ $(u_n)_{n\in I}$ une suite convergente (qui admet une limite)

Ⓣ cette limite est unique.

Ⓓ par l'absurde : Soit $\ell_1 \neq \ell_2$:

On a : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$ tel que $n > N_1 \Rightarrow |u_n - \ell_1| < \varepsilon$

et $\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 > 0$ tel que $n > N_2 \Rightarrow |u_n - \ell_2| < \varepsilon$

Soit : $|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - \ell_2 + u_n - u_n|$

$$= |(u_n - \ell_2) + (-u_n + \ell_1)| \underset{\hookrightarrow \text{thm. algèbre}}{\leq} |u_n - \ell_2| + |\overset{u_n - \ell_1}{\cancel{u_n + \ell_1}}|$$

Si $n > N = \max(N_1, N_2)$

alors $\forall \varepsilon > 0$, $|\ell_1 - \ell_2| \leq \underbrace{|u_n - \ell_1|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|u_n - \ell_2|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon$

Cette proposition contient une contradiction :

prenons $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}$, alors :

$$|\ell_1 - \ell_2| < 2 \cdot \varepsilon = \cancel{2} \cdot \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{\cancel{2}}$$

contradiction

$\Rightarrow\!\Leftarrow$

Exercice 2 : (H) Soit une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n = q^n$ et $0<q<1$

(T) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

(D) à montrer :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N>0 \text{ tel que } n>N \Rightarrow \left|\overset{q^n}{\cancel{u_n}} - \overset{0}{\cancel{\ell}}\right| < \varepsilon$$

Brouillon : soit $|q^n|<\varepsilon \Leftrightarrow q^n < \varepsilon$ (car $q^n>0$)

$\Leftrightarrow \log(q^n) < \log(\varepsilon) \Leftrightarrow n\log(q) < \log(\varepsilon)$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{\log(\varepsilon)}{\boxed{\log(q)}}$ (car $\log(q)<0$)

Ainsi en prenant $N > \dfrac{\log(\varepsilon)}{\log(q)}$

on aura : $n > N > \dfrac{\log(\varepsilon)}{\log(q)} \Rightarrow |q^n| < \varepsilon$

exemple : soit $\varepsilon = 10^{-6}$

et $q = \frac{1}{3}$

calcul : $N > \dfrac{\log(10^{-6})}{\log(\frac{1}{3})} = \dfrac{-6}{-\log(3)} \simeq 12,5$

en prenant $N=13$, on aura :

$n>13 \Rightarrow \left|\left(\frac{1}{3}\right)^n\right| < 10^{-6}$