Examen de mathématique – 10 - complémentaire

(Les limites-1)

1) Compléter :

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \ldots$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \ldots$

2) Démontrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

3) Démontrer à partir de la définition de la limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ si $u_n = \dfrac{1}{n}$.

4) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{1-\frac{1}{x}}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^5+1}{x^3+1}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}$

f) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - 9}$

g) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - 9}$

h) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\cos 2x + 1}{\cos 6x}$

Pour chaque limite on demande de bien détailler les étapes de calculs et de préciser clairement quand une limite de référence est utilisée.

4) a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin(x) - \cos(x)}{1 - \tan(x)} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - 1} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin(x) - \cos(x)}{1 - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin(x) - \cos(x)}{\frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x)}}$

$= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{(\overset{-1}{\cancel{\sin(x) - \cos(x)}}) \cdot \cos(x)}{\cancel{\cos(x) - \sin(x)}} = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{1 - \frac{1}{x}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{\frac{x-1}{x}} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\overset{-1}{\cancel{(1-x)}} \cdot x}{\cancel{x-1}} = -1$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x) - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cancel{x} \; 1}{\cancel{x}(\sqrt{1+x} + 1)}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1} + 1} = \dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^5 + 1}{x^3 + 1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

$$\begin{array}{c|ccccc:c} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\cancel{(x+1)}(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}{\cancel{(x+1)}(x^2 - x + 1)} = \dfrac{5}{3}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1 - \cos(x)}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin(x)\cos(x)\left(\sqrt{1 + \cos(x)}\right)}{\sqrt{1 - \cos(x)} \cdot \sqrt{1 + \cos(x)}}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin(x)\cos(x)\sqrt{1 + \cos(x)}}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin(x)\cos(x)\sqrt{1 + \cos(x)}}{|\sin(x)|}$

d'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{2\cancel{\sin(x)}\cos(x)\sqrt{1 + \cos(x)}}{\cancel{\sin(x)}} = 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{2\cancel{\sin(x)}\cos(x)\sqrt{1 + \cos(x)}}{\underset{(-1)}{-\cancel{\sin(x)}}} = -2\sqrt{2}$

$\neq$ donc la limite n'existe pas

f) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - 9} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\cancel{(x-3)}(2x-1)}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \dfrac{5}{6}$

g) $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ > \\ <}} \dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-9} = \dfrac{42}{0^{-}_{+}} = \begin{matrix} -\infty \\ +\infty \end{matrix}$

x		-3		3	
x^2-9	$+$	0	$-$	0	$+$

h) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\cos(2x)+1}{\cos(6x)} = \dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+1}{\cos(\pi)} = \dfrac{2\cdot\frac{1}{2}+1}{-1} = \dfrac{1+1}{-1} = -2$