

Examen de mathématique - II

(Les limites(2) - asymptotes - continuité)

Exercice 1 : Démontrer : Soit une fonction f ;
 si Γ_f admet une asymptote affine aux infinis d'équation $y = mx + h$,
 alors $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right]$ et $h = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$. (Poser $\boxed{H}$, $\boxed{T}$, $\boxed{D}$)

Exercice 2 : Calculer les limites suivantes :

- 1a) $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^2 + 5x - 14}{x^4 + 10x^3 + 20x^2 - 10x - 21}$ 1b) idem si $x \rightarrow -\infty$ 1c) idem si $x \rightarrow 1$
- 2a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{4x - 2}}{x - 3}$ 2b) idem si $x \rightarrow +\infty$ 2c) idem si $x \rightarrow -\infty$

Exercice 3 : Etudier le domaine de définition et les asymptotes de la fonction f définie par :

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4}$$

Exercice 4 : Trouver une fonction rationnelle f dont le graphique passe par le point $A(-5 ; 20)$ et qui admet pour asymptotes les droites d'équations $x = -2$, $x = 1$ et $y = 3x - 7$.

Exercice 1

Théorème 21 : Si Γ_f admet une asymptote affine à l'infini d'équation $y = g(x) = mx + h$,

$$\begin{cases} \textcircled{+} & \text{alors } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] \text{ et } h = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] \text{ ou} \\ \textcircled{-} & \text{alors } m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] \text{ et } h = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx]. \end{cases}$$

$\textcircled{D}$ par déf. 11, Γ_g avec $g(x) = mx + h$

$\textcircled{+}$ est as. affine à l'infini ($\pm\infty$) pour Γ_f

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x) - (mx + h)}{x} = \frac{\textcircled{+} 0}{\pm\infty} \stackrel{(\text{thm})}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx}{x} - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{h}{x} = 0$$

$\underbrace{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{h}{x}}_{= \frac{h}{\pm\infty} = 0}$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - m - 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

(remarque : si $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, il n'y a pas d'as. affine pour Γ_f)

* puis, avec $m \in \mathbb{R}$ la pente de l'as. affine

$$\text{Or on a : } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + h)] = 0 \text{ (déf. 11)}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \underbrace{h}_{h} = 0$$

$$\Leftrightarrow h = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$$

eff

Exercise 1

$$1a) \lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^2 + 5x - 14}{x^4 + 10x^3 + 20x^2 - 10x - 21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -7} \frac{(x+7)(x-2)}{(x+7)(x^3 + 3x^2 - x - 3)} = \frac{-9}{-192}$$

$$= \frac{9}{192} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 64} = \frac{3}{64}$$

coefficient

1	10	20	-10	-21
-7	1	3	-1	-3
				0

$$1b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ car } \deg(\text{den}) = 4 < 2 = \deg(\text{num.})$$

$$1c) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{-8}{0} = \pm \infty?$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+7)(x-2)}{(x+7)(x^3 + 3x^2 - x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{(x-1)(x^2 + 4x + 3)} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

Tableau des signes:

x	-∞	-3	-1	1	+
x-1	-	-	-	0	+
x ² +4x+3	+	0	-	0	+
produit	-	0	+	0	+

1	3	-1	-3
	1	4	3
1	1	4	3
			0

et $x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$

$$2a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x-2}}{x-3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+1-4x+2}{(x-3)(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{4x-2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{(x-3)(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{4x-2})} = \frac{x-1}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

coefficient:

$$x^2-4x+3 = (x-3)(x-1)$$

$$2b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x-2}}{x-3} = \left(\frac{\infty - \infty}{+\infty} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4x+3}{(x-3)(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{4x-2})} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4x+3}{(x-3)x \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4x+3}{x^2-3x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}}} = 1 \cdot 1 = 1$$

$\frac{+\infty}{+\infty} = 1$ $\frac{1}{1} = 1$

2c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x-2}}{x-3}$ n'a pas de sens car

$$D_f = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[- \{3\}$$

$$\text{car } \begin{cases} 4x-2 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Exercice 3 :

$f(x) = x - \sqrt{x^2-4}$ et $D_f =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

* f n'admet pas d'as. vert.

car $x^2 - 4 \geq 0$

x^2-4	+	0	-	0	+	$\rightarrow \mathbb{R}$
x		-2		+2		

car il n'y a aucun point

adhérent à D_f et non élément de D_f .

L * as. aux infinis (affines):

$$a) \text{ si } x \rightarrow +\infty: m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{x} = \left(\frac{\infty - \infty}{\infty} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x} \right) = 1 - 1 = 0$$

$$\text{puis: } h = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 + 4}{x + \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{4}{+\infty}$$

$$= 0$$

donc $\boxed{y=0}$ est as. horizontale si $x \rightarrow +\infty$

$$b) \text{ si } x \rightarrow -\infty: m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{-x \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x} \right) = 2$$

$$\text{puis } h = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 4} - 2x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\sqrt{x^2 - 4} - x) = (-\infty + \infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2}{-\sqrt{x^2 - 4} + x} = \frac{-4}{-\infty} = 0$$

donc $\boxed{y=2x}$ est as. affine si $x \rightarrow -\infty$

Exercice 3: Trouver f , une fonction rationnelle

si $\Gamma_f \ni A(-5; 20)$, $\boxed{x=-2}$ et $\boxed{x=1}$ sont A.V.

et si $\boxed{y=3x-7}$ est as. affine.

$$\text{Soit } f(x) = (3x-7) + \frac{a}{(x+2)(x-1)} \quad \text{et } a \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (3x-7)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{(x+2)(x-1)} = 0 \quad \text{donc } \boxed{y=3x-7} \text{ est A.A.}$$

$$\text{de plus } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -13 + \frac{a}{0} = \infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -4 + \frac{a}{0} = \infty$$

$$\text{; et } A(-5; 20) \in \Gamma_f \Leftrightarrow$$

$$f(-5) = -22 + \frac{a}{(-3) \cdot (-6)} = 20$$

réponse:

$$\Leftrightarrow a = (20 + 22) \cdot 18 = 42 \cdot 18 = 756$$

$$f(x) = 3x - 7 + \frac{756}{(x+2)(x-1)}$$